Днепропетровский государственный институт физической культуры и спорта

Кафедра олимпийского и профессионального спорта

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ В СФЕРЕ ФИЗИЧЕСКОЙ КУЛЬТУРЫ И СПОРТА

Методические рекомендации для студентов, магистрантов и аспирантов институтов физической культуры и спорта

Днепропетровск-2009

Основы математической статистики и ее использование при обработке данных в сфере физической культуры и спорта (Методические рекомендации для студентов, магистрантов и аспирантов институтов физической культуры и спорта)/Соств. Д.Н. Тогобицкая, Г.Н. Шамардина, Н.Г. Долбышева – Днепропетровск: ООО «Вета», 2009. – 63 с.

Методические рекомендации по использовании основ математической статистики при обработке полученных данных предназначены для студентов, магистрантов и аспирантов обучающихся в институтах физической культуры и спорта. Они позволят сформировать знания и получить умения при обработке полученных данных в процессе научно-исследовательской работы, а также интерпретировать, анализировать, сравнивать их и делать конкретные выводы.

Рецензент:
кандидат технических наук, доцент **Ефимов В.Б.**

Рассмотрены и утверждены
на заседании кафедры олимпийского и
профессионального спорта ДГИФКиС
Протокол №___ от «_____» _____2009

Утверждены
на заседании методического
совета ДГИФКиС
Протокол №___ от «_____» _____2009

© Д.Н. Тогобицкая, Г.Н. Шамардина,
Н.Г. Долбишева

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…….……4

ПРЕДИСЛОВИЕ……5

РАЗДЕЛ 1. ПЕРВИЧНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ…….8
1.1. Исходные данные……..…….8
1.2. Формы представления статистического материала……...…..9
1.3. Числовые характеристики выборки……..……13
1.4. Центральные моменты и формы распределения признака……...…….16
1.5. Сравнение средних двух выборок…….23
1.6. Сравнение частотных распределений…….…..27
1.7. Сравнение дисперсий двух выборок……...….28

РАЗДЕЛ 2. ВЫЯВЛЕНИЕ СКРЫТЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ……...…..31
2.1. Корреляционно-регрессионный анализ…….……...31
2.2. Методика факторного анализа…….48

ЛИТЕРАТУРА……..……56

ПРИЛОЖЕНИЕ……..57

ВВЕДЕНИЕ

Статистические методы, проникнув в самые разные направления прикладных исследований, стали одним из основных приемов анализа и обработки опытных данных. Однако фактическое использование уже разработанных фундаментальной наукой статистических методов исследования остаются невостребованными в связи с недостатком соответствующего образования у пользователей, которым эти методы приходится применять. Большинство изданий книг, рассчитаны на подготовленного читателя, издание же руководств для пользователей, имеющих дело с реально наблюдаемыми экспериментальными исследованиями отличается особой редкостью.

Основной задачей математической статистики является обеспечение единства информативных признаков и точности измерений. Предметом математической статистики является информация контроля и измерений в физическом воспитании и спорте. В содержание ее входит сопоставление данных, полученных в ходе исследований, их оценка и анализ.

Через все разделы проводится мысль о том, что выбор соответствующего метода исследования должен базироваться прежде всего на понимании сути изучаемого явления. В каждом разделе дается критическая оценка материала, доведенного до рецептурного описания. Более полное изложение методов прикладного статистического анализа полученных в ходе исследования данных можно найти в работах [1-7]. В работах [5, 8] на конкретных примерах из различных прикладных областей широко иллюстрируется теоретический материал критериальных оценок и проверки гипотез. В части выбора инструментальных средств анализа данных на ПЭВМ можно обратиться к работам [10-13].

Методические рекомендации состоят из двух взаимосвязанных разделов. В первом разделе изложены методы первичного одномерного статистического анализа. Во втором – вторичный анализ данных на основе корреляционно-регрессионного анализа, а также наименее описанного в популярном изложении одного из методов многомерного сравнительного анализа – факторного анализа, позволяющего выявлять связи между m признаками, осуществлять «сжатие» информации путем определения общих факторов, число которых значительно меньше количества первоначально взятых признаков.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Возросшие требования к подготовке специалистов с высшим образованием, необходимость насыщения учебной программы для магистров, аспирантов научными дисциплинами, теоретический подход к обучению оказывает заметное влияние на содержание профессиональной подготовки специалистов в области физической культуры и спорта. В высших учебных заведениях нашего государства ведутся поиски совершенствования учебного процесса, улучшения системы образования.

Правильная организация научно-исследовательской работы с максимальной эффективностью (минимальные затраты умственного труда, средств, материалов и времени) как одного из основных направлений высшей школы при написании магистерских работ и диссертаций возможно лишь в случае, если экспериментатор или коллектив ясно представляет себе задачу и цель исследований, а также точно знает, в какой последовательности и как эти исследования должны протекать.

Для получения практического и теоретического материала в любом исследовании необходимо обратиться к максимально возможной точности измерений, уметь определять величину, тип и принципы ошибок, научиться выделять их из громадного количества тестов, исследовать только те, что соответствуют метрологическим требованиям.

Какой бы точной ни была регистрация фактов, полученные данные необходимо привести в определенную систему, подвергнуть исчерпывающему анализу, после чего сделать соответствующие выводы. В процессе анализа должны быть отброшены случайности и выявлены закономерности. При обработке собранных данных может оказаться, что их или недостаточно или они противоречивы и поэтому не дают оснований для окончательных выводов. В таком случае исследование необходимо продолжить, внеся в него требуемые дополнения.

Исследования в области физического воспитания и спорта связаны, прежде всего, с изучением учебно-воспитательного и учебно-тренировочного процесса. педагогический эффект в виде того или иного уровня знаний, достигнутого исследуемыми той или иной степени развития двигательных умений и навыков свидетельствует о преимуществах и недостатках применяемых методов, средств и методических приемов.

Педагогический эффект в процессе научных исследований характеризуется двумя сторонами: качественной и количественной. Качественный анализ педагогического явления можно признать только в том случае, если одновременно произведен количественный анализ, то есть к оценке процесса обучения подошли с позиции математических методов обучения.

Под статистическими данными понимаются сведение о числе объектов в какой-либо более или менее обширной совокупности, обладающие теми или иными признаками (например, количество юношей-спортсменов, имеющих конкретный уровень общей физической подготовленности).

Предметом математической статистики является формальная сторона статистического метода исследования. Математическая статистика совершенно одинаково оценит изменение средней скорости движений спортсмена (легкоатлета-спринтера, велосипедиста), хотя, природа этих движений имеет существенные различия.

Математической обработке подвергаются те или иные оценки, по которым судят об эффективности педагогического процесса, но нельзя забывать, что они являются лишь суммарным выражением знаний, умений и навыков, исключающим возможность выявления связей между учителем и учениками, тренером и спортсменами в процессе их взаимодействия.

Использование математической статистики в педагогических исследованиях не самоцель, а одно из эффективных средств познания объективных законов обучения и воспитания.

Применяя в исследовании те или иные методы, экспериментатор получает большую или меньшую совокупность различных числовых показателей, призванных охарактеризовать изучаемое явление. Перед исследователем встает сложная задача: правильно оценить собранные данные и на этой основе сделать практические выводы. Самое главное, каким бы большим числом данных экспериментатор ни располагал, все же они будут собраны на ограниченном количестве исследуемых. Необходимо найти способ, который позволял бы делать выводы значимыми не только для данной группы исследуемых, но и для всех аналогичных групп людей.

Каждое проводимое исследование станет реальностью только тогда, когда проникнет в практику.

Любая отрасль современной науки стремится, как правило, выразить вскрытые ею объективные законы в форме математической модели, т. е. в виде тех или иных соотношений между показателями, характеризующими различные стороны познанных явлений. Такой метод определенных соотношений между показателями называют функциональной зависимостью. Функциональная зависимость позволяет предсказывать значения зависимой величины (функции) при любом значении «управляющей» ею величины (аргумента). Отсюда вытекает практическая научная ценность функциональных моделей: они позволяют предсказывать ход описываемого ими процесса, управлять этим процессом.

Результаты обработки собранных данных, в конечном итоге, могут или подтвердить выдвинутую исследователем гипотезу, или опровергнуть ее, или оказаться нейтральными. Гипотеза подтверждается тогда, когда ученый смог предусмотреть все тонкости решаемого вопроса; она не подтверждается, если сложность объекта изучения оказалась выше, сильнее проницательности человека. В случае нейтрального ответа на поставленный вопрос причину надо усматривать: а) в отсутствие признаков, характерных для изучаемого явления; б) в несовершенстве методов исследования, что не позволяет выявить имеющиеся признаки; в) в нарушении основных требований к проведению научной работы, что искажает объективно существующую зависимость признаков (неравноценность состава исследуемых, условий исследования и пр.).

Три перечисленных исхода научного предположения являются безусловными, неизменными во всех случаях. Если, например, в данном эксперименте подтвердилось предположение о большей эффективности какого-то метода обучения в группе детей, то это никак не означает достоверности обнаруженного факта для групп взрослых.

Если при использовании одного и того же метода обучения факт повышения эффективности учебного процесса то обнаруживается, то не обнаруживается в одном и том же коллективе занимающихся или в разных, но идентичных коллективах и при этом не удается установить какую-то системность этих изменений, то, видимо, данный метод обучения подвержен действию каких-то, пока еще неизвестных, неуловимых факторов, а потому говорить о выявлении закономерности пока еще преждевременно.

Часто бывает необходимо иметь какие-то критерии, по которым можно было бы судить о достоверности различий в полученных количественных данных. В сравнительном эксперименте выявляется эффективность двух методик обучения детей. В результате собран ряд чисел, характеризующих методику обучения «А» и методику обучения «Б». Требуется установить, 'Действительно ли собранные числовые величины говорят о различной эффективности двух методик или эти различия в количественных показателях являются случайными и не отражают истинной ценности данных методик.

Для установления достоверности различий прибегает к вычислению некоторых статистических показателей (параметров).

РАЗДЕЛ 1
ПЕРВИЧНЫЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

Полученные в результате эксперимента данные носят случайный характер. Данные фиксируются с определенной погрешностью (ошибки измерений, методические, субъективные и т.д.). Иногда экспериментатор в результате невнимания допускает грубые ошибки. При повторах такие ошибки выявляются чисто визуально. Но иногда они носят скрытый характер и являются особо ценной информацией. Такие наблюдения необходимо отправлять в отдельную «копилку» данных для их тщательного изучения.

Вся подлежащая изучению совокупность однородных элементов называется **генеральной совокупностью**. Например, генеральной совокупностью могут быть все жители г. Днепропетровска, студенты данного потока, болельщики футбола и т.д.

Генеральная совокупность может быть конечной или бесконечной. При конечной генеральной совокупности каждый ее элемент представляется реально существующим индивидуумом или имеющимся значением случайной величины. Оно может быть сколь угодно большим (число студентов в вузах города). Бесконечные генеральные совокупности обычно получаются в результате измерений какого-нибудь признака (например, артериальное давление, рост, вес и т.д.). На практике генеральную совокупность чаще всего изучить не представляется возможным. Часть случайно отобранных из генеральной совокупности элементов называется **выборочной совокупностью** или **выборкой.**

Проводя отбор, следует стремиться к тому, чтобы выборка была репрезентативной (представительной), т.е. чтобы она создавала правильное представление о генеральной совокупности; в противном случае на основе выборки невозможно сделать вывод относительно всей совокупности. Очевидно, чем больше наблюдений в нашей выборке, тем больше можно доверять сделанным на ее основе выводам.

Признаки могут быть количественными, качественными и альтернативными. Признаком качественных признаков могут быть характеристики: низкий, высокий, средний и т.д. Альтернативные признаки – это качественные признаки, которые могут иметь два противоположных значения: медленный – быстрый, да – нет и т.д. На практике чаще всего используются количественные признаки.

1.1. Исходные данные

Наблюдаемые в результате экспериментального исследования данные обычно сводятся в таблицу, которая представляет комбинацию горизонтальных рядов (характеристики одного эксперимента) и вертикальных столбцов (значение конкретного показателя). Основное содержание такой таблицы раскрывает ее название (рис. 1.1).

Название таблицы

№ п/п	Идентификация объекта	Название фиксируемых показателей						
		1	2	3	4	5	...	*m*
1								
2								
3								
4								
5								
...								
n								

Рис. 1.1. **Форма стандартного оформления таблиц.**

В формализованной форме полученные экспериментальные данные записываются в виде матрицы X_{ij}. Количество строк и столбцов определяют ее размерность (i=1, 2, ..., m; j=1, 2, ..., n):

$$X = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2m} \\ . & . & . & . & . \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nm} \end{vmatrix}$$

Такие данные называют первичными для последующей статистической обработки.

1.2. Формы представления статистического материала

Получив в свое распоряжение статистические данные, характеризующие какое-либо явление, исследователь должен прежде всего подумать о систематизации этих данных, о приведении их в какой-то порядок.

Если выборочные значения расположить в порядке их возрастания, то такой упорядоченный ряд называется вариационным рядом. Порядковый номер элемента в вариационном ряду называется рангом. При большом числе наблюдений (больших выборках) вариационный ряд группируется. Если наблюдаемая величина X дискретна, то, обозначив через x_i возможные значения дискретной случайной величины, а через m_i – число, показывающее сколько раз наблюдалось значение x_i (это число иногда называют частотой), в результате группировки получим следующий вариационный ряд:

x_i	x_1 x_2 ... x_i ... x_k
m_i	m_1 m_2 ... m_i ... m_k

Таблица 1.2

Пример исходной выборки

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
X	1	0	1	0	7	0	1	1	0	0	0	6	1	1	0	2	0	0	1	1	1	0	2	1	0

Подсчитаем число появления каждого значения.

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	11	10	2	0	0	0	1	1

Построенная таблица является дискретным вариационным рядом.

Если наблюдаемая величина непрерывна, то группировку выборочных значений проводим следующим образом: весь диапазон наблюдаемых значений делим на интервалы и подсчитываем число наблюдавшихся значений, принадлежащих каждому из интервалов. Обозначив через $(x_i;\ x_{i+1})$ – границы интервалов, а через m_i – число значений величины X, наблюдавшихся в i – ом интервале, получим следующий интервальный вариационный ряд:

i	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_i; x_{i+1})$	...	$[x_k; x_{k+1})$
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k

Квадратная скобка обозначает, что здесь включается левый конец интервала и не включается правый (можно включать правый и не включать левый). Длина i-го интервала $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

Для определения рациональной величины интервала (ΔX), обычно в статистике используют формулу Стэрджесса:

$$\Delta X = (X_{\max} - X_{\min})/(1 + 3.322 \lg n),$$

где X_{max} и X_{min} – соответственно максимальное и минимальное выборочные значения величины. Если ΔX окажется дробным числом, то ее округляют до ближайшего целого или до ближайшей несложной дроби. В качестве X_1 принимают значение, равное

$$X_{\min} - \Delta X/2.$$

Пусть в результате испытаний получены следующие результаты:
330.0; 329.0; 300.0; 319.0; 323.0; 290.0; 285.0; 290.0; 320.0; 305.0;
293.0; 285.0; 310.0; 310.0; 290.0; 290.0; 300.0; 295.0; 285.0; 305.0;
295.0; 275.0; 295.0; 300.0; 320.0; 250.0; 257.0; 270.0; 260.0; 255.0;
270.0; 300.0; 290.0; 270.0; 250.0.

Построим интервальный вариационный ряд. Определим
ΔX = (330.0-250.0)/(1+3.222 lg35) = 13.389.

Округляя, получим ΔX = 13,0

$$X_1 = 250.0 - 7.0 = 243.0.$$

J_i	/243; 263) :	/264; 276) :	/277; 289) :	/290; 302) :	/303; 315) :	/316; 330)
m_i	5	4	3	13	4	6

По результатам сгруппированных данных строится статистический ряд, дополненный частотой попадания величины X в i-ый интервал:

x_i	x_1	x_2	.....	x_k
m_i	m_1	m_2	.....	m_k
P_i^*	P_1^*	P_2^*	.....	P_k^*

Если наблюдаемая величина X непрерывна

J_i	$[x_1; x_2)$	$[x_2; x_3)$	...	$[x_i; x_{i+1})$	...	$[x_k; x_{k+1})$
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
P_i^*	P_1^*	P_2^*	...	P_i^*	...	P_k^*

Частоты P_i^* находятся как $P_i^* = \frac{m_i}{n}$, где n – объем выборки. (Такую частоту иногда называют частостью или относительной частотой).

Статистический ряд графически оформляется в виде полигона или гистограммы. Для дискретной случайной величины может быть построен лишь полигон. Для непрерывной - как полигон, так и гистограмма.

Если наблюдаемая величина дискретна, полигон строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются значения X_i статистического ряда, в каждом из них строится ордината, величина которой равна или пропорциональна частоте соответствующего значения. Концы ординат соединяются отрезками прямых.

Для данных в табл. 1.2 статистический ряд и полигон (рис. 1.1) имеют вид:

Таблица 1.2

Статистический ряд

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	11	10	2	0	0	0	1	1
P_i^*	0,44	0,4	0,08	0	0	0	0,04	0,04

Полигон частот для данных табл. 1.2.

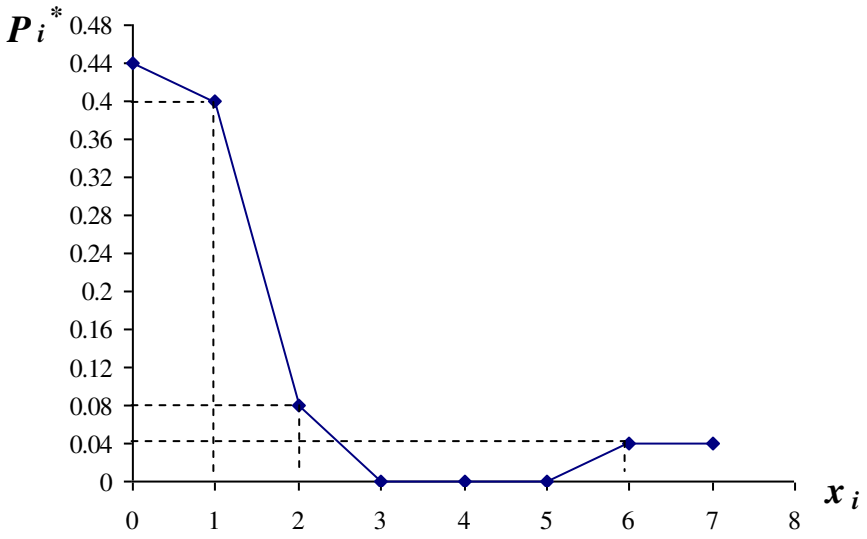


Рис.1.1. **Полигон частот**

Для непрерывной случайной величины полигон строится следующим образом: на оси абсцисс откладываются интервалы: в середине каждого из них строится ордината, величина которой равна или пропорциональна частоте соответствующего интервала, концы ординат соединяются отрезками прямых.

Построим статистический ряд для представленного выше примера непрерывной величины.

Таблица 1.3

Статистический ряд и полигон частот

J_i	(243; 263]	(264; 276]	(277; 289)	(290; 302]	(303; 315]	(316; 330]
m_i	5	4	3	13	4	6
P_i^*	0,14	0,11	0,09	0,37	0,11	0,17
P_i^{**}	0,14	0,26	0,34	0,71	0,83	1,00

Гистограмма строится следующим образом: по оси абсцисс откладываются интервалы, на каждом из которых, как на основании, строится прямоугольник, площадь которого равна или пропорциональна частоте соответствующего интервала. Для нахождения высот прямоугольников следует частоту каждого интервала разделить на его длину и полученное число взять в качестве высоты прямоугольника ($h_i = \dfrac{P_i^*}{\Delta x_i}$). Гистограмма, соответствующая приведенному статистическому ряду (табл. 1.3) представлена на рис. 1.2.

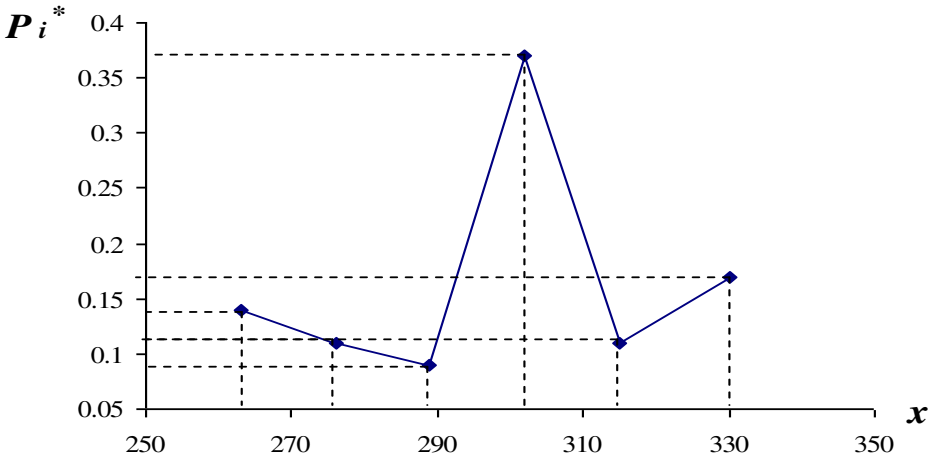


Рис.1.2. **Гистограмма статистического ряда**

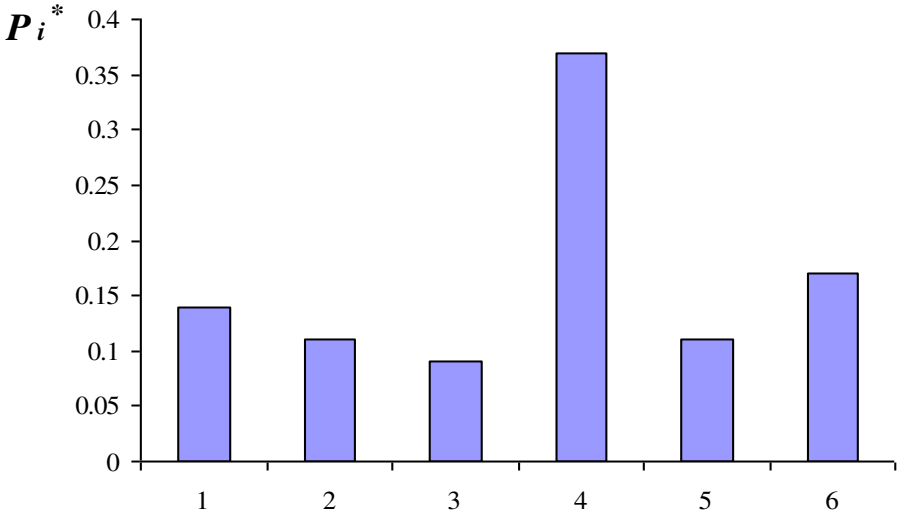


Рис. 1.2а. **Гистограмма статистического ряда**

При больших n площадь каждого прямоугольника гистограммы будет приблизительно равна вероятности попадания наблюдаемого значения в соответствующий интервал. Поэтому верхняя часть контура гистограммы образует статистический аналог кривой распределения генеральной совокупности. Если через середины ординат провести сглаживающую кривую, получим эмпирическую функцию распределения.

При увеличении числа данных и уменьшении интервала сглаживающая зависимость стремится к плавной кривой – кривой распределения. В случае, когда частоты вариационного ряда признака последовательно суммируются, получают ряд накопленных частот – накопленную интегральную функцию распределения - кумулянту P_i^{**} (табл. 1.3). Кривая накопленных частот представлена на рис. 1.3.

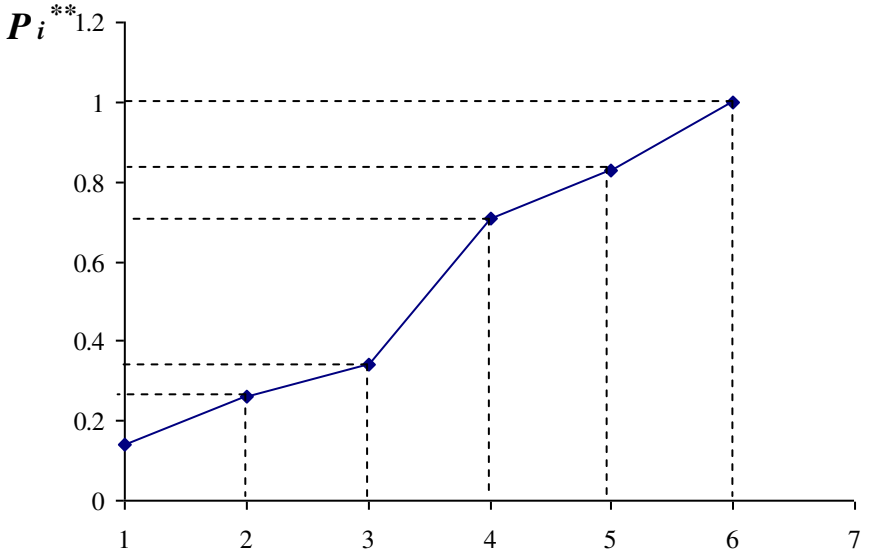


Рис.1.3. **Кривая накопленных частот.**

Наиболее часто встречается одновершинная (одномодальная) кривая распределения так называемого нормального закона распределения. Кривая распределения в статистике характеризуется несколькими показателями. Важнейшими из них являются описанные ниже характеристики центра распределения, островершинности, показатели колеблемости признака.

1.3. Числовые характеристики выборки

Статистическая обработка результатов эксперимента сводится к математическим приемам, формулам, способам количественных расчетов, с помощью которых обобщаются данные, приводятся в систему, выявляются скрытые в них закономерности. В результате первичной статистической обработки вычисляются так называемые элементарные математические статистики, характеризующие выборочное распределение данных. К ним относятся, например, выборочное среднее, выборочная дисперсия, мода, медиана и ряд других. Обычно методы вычисления элементарных математических статистик начинаются с выборочного среднего. Выборочное

среднее имеет несколько разновидностей в зависимости от характера исходной информации. Она может быть простой или взвешенной. Обозначается символом $\bar{x}$ (черта над символом обозначает осреднение индивидуальных значений) и измеряется в тех же единицах, что и признак, в частности: средняя арифметическая; средняя гармоническая, средняя геометрическая, средняя квадратическая и т.д. Наиболее распространенной является средняя арифметическая, которая вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$$

В больших по объему выборках отдельные значения признака x_j могут повторяться. В таком случае их объединяют в группы (k=1, 2, ... , m), а количество значений признака определяются как сумма произведений значений x_j на соответствующие частоты f_j, т.е. как $\sum_{j=1}^{m} x_j f_j$. Такой процесс в статистике называется взвешиванием, а значения f_j – весами.

Средневзвешенная арифметическая вычисляется в этом случае по формуле:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j f_j / \sum_{j=1}^{m} f_j$$

Средняя гармоническая определяется из выражения

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{m} x_j f_j / \sum_{j=1}^{m} x_j f_j / Z_j ,$$

где Z_j – характерная константа для каждой подгруппы j.

Средняя геометрическая определяется в случае, когда свойство совокупности определяется как произведение отдельных значений признака:

$$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1, x_2, ..., x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} ,$$

где $\prod$ - символ произведения.

По физическому смыслу средняя величина $\bar{x}$ является центром тяжести выборки. Чаще всего она характеризует средний уровень показателя, его центр. Однако не следует забывать о том, что это относится к однородной выборке, т.е. когда значения признака заполняют непрерывно интервал его изменения от минимального значения X_{min} до максимального X_{max}. Если рассматривать две группы значений признака, существенно отличающегося по его уровню (мужчины – женщины, например), то среднее значение не будет иметь вообще никакого смысла. В этом случае эти совокупности следует рассматривать как отдельные выборки.

Иногда средний уровень показателя более точно характеризует мода (M_O) и медиана (Me). При этом мода характеризует наиболее часто встречаемое в выборке значение. Его повторяемость в выборке наибольшая. Медиана – значение выборки левее которого лежит более половины наблюдений (50% наблюдений).

В одних совокупностях индивидуальные значения признака плотно группируются вокруг центра распределения, в других – существенно отклоняются. Чем меньше отклонение, тем однородней совокупность, а значит, тем более надежные и типичные характеристики центра распределения, прежде всего, как отмечалось ранее, средняя величина.

Изучение степени колеблемости признака, источник его вариации – задача поиска закономерностей. К характеристикам колеблемости относятся:

Вариационный размах $R = X_{max} - X_{min}$. Он характеризует максимальный диапазон вариации признака. Чаще всего при изучении вариации признака используют его отклонения от среднего значения $x_j - \bar{x}$. Поскольку $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$, то используется или модуль отклонений $\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|$, или квадраты отклонений $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Обобщающими характеристиками являются их средние значения:

- линейное $l = \sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}| / n$;

- квадратичное, или стандартное $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / n}$;

- дисперсия (средний квадрат отклонения) $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / n$;

Среднее квадратичное отклонение – мера надежности средней арифметической. Чем меньше σ, тем лучше средняя арифметическая отражает свойства совокупности.

Дисперсия и среднее значение являются фундаментом математической статистики и широко используются для измерения связи и проверки статистических гипотез. Отношение характеристик вариации к центру распределения $\bar{x}$ называют коэффициентом вариации и чаще всего выражают в процентах.

$$V = \sigma / \bar{x} \cdot 100\,(\%)$$

Коэффициент вариации признака наиболее часто используется при оценке степени вариации признака в совокупности. В практике колеблемость результатов измерений в зависимости от величины коэффициента вариации считают небольшой (0-10%), средний (11-20%) и большой (больше 20%).

Рассмотрим пример анализа статистических данных.

ПРИМЕР 1.1.

Рассмотрим статистические значения уровня знаний по темам (приложение А, протокол 1). Результаты представлены в таблице 1.4, которые свидетельствуют о том, что наивысший средний балл уровня знаний по вопросам физического здоровья у юношей в большинстве случаях

наблюдается в ЭГ 2 (8,2 – 8,5), у девушек по отдельным темам у ЭГ 1 и ЭГ 2 (8,3 – 9,7). Значительно ниже показатели, как у юношей, так и у девушек третей экспериментальной группы (6,9 -8,4).

Необходимо отметить, что во всех трех группах уровень знаний юношей незначительно ниже, чем уровень знаний девушек по всем изученным темам.

Таблица 1.4

Статистические значения уровня знаний в экспериментальных группах по отдельным темам

Група	Стать	n	Тема											
			Т-1			Т-2			Т-3			Т-4		
			$\overline{X}$	S	V(%)	$\overline{X}$	S	V(%)	$\overline{X}$	S	V(%)	$\overline{X}$	S	V(%)
ЭГ 1	Юн.	28	8,2	0,64	7,8	7,7	0,67	8,7	8,4	0,57	6,9	8,6	0,79	9,2
	Дев.	24	9,5	0,54	5,7	8,3	0,57	6,9	9,7	0,50	5,2	8,8	0,54	6,1
ЭГ 2	Юн.	14	8,2	0,57	6,9	8,3	0,66	7,9	8,5	0,52	6,1	8,5	0,58	6,8
	Дев.	20	9,1	0,65	7,1	9,2	0,79	8,6	9,1	1,08	11,9	9,4	0,80	8,5
ЭГ 3	Юн.	11	6,9	0,56	8,1	7,3	0,61	8,4	8,1	0,52	6,4	7,7	0,40	5,2
	Дев.	14	7,7	1,53	19,9	7,8	1,23	15,8	7,5	1,30	17,3	8,1	1,44	17,8

Примечание: S^2 – оценка выборочной дисперсии σ^2

Вычисленные коэффициенты вариации позволяют говорить о том, что в ЭГ 3 у девушек средняя совокупность баллов (т.е. совокупность знаний по темам средняя) т.к. коэффициент вариации составил от 15,8% до 19,9%. Это свидетельствует о разбросе показателей и отсутствии стабильности уровня знаний. В остальных группах данный коэффициент находиться в пределах 5,2-9,5%, что говорит о незначительном размахе показателей и свидетельствует о совокупности уровня знаний юношей и девушек старшего школьного возраста.

Данные результаты можно рассматривать в диапазоне от минимальных до максимальных значений. В соответствии с этим диапазон баллов уровня знаний по отдельным темам составляет:

в ЭГ 1 – у юношей по Т-1 – 6,7–9,7 баллов, по Т-2 – 6,3–9,0 баллов, по Т-3 и Т-4 – 7,0–10,0 баллов; у девушек по Т-1 – 8,3–10,7 баллов, по Т-2 – 7,0–10,0 баллов, по Т-3 – 8,7–10,7 баллов и Т-4 – 7,7–10,0 баллов;

в ЭГ 2 – у юношей по Т-1 – 7,8–9,0 баллов, по Т-2 – 7,3–9,7 баллов, по Т-3 – 7,3–10,0 баллов и Т-4 – 7,7–9,0 баллов; у девушек по Т-1 – 7,3–10,3 баллов, по Т-2 – 8,0–10,3 баллов, по Т-3 – 7,3–10,3 баллов и Т-4 – 8,3 – 10,7 баллов;

в ЭГ 3 – у юношей по Т-1 – 5,3–7,3 баллов, по Т-2 – 8,3–9,7 баллов, по Т-3 – 7,0–9,3 баллов и Т-4 – 7,0–8,3 баллов; у девушек по Т-1 – 7,3–9,0 баллов, по Т-2 и Т-3 – 7,0–9,0 баллов, Т-4 – 7,0–10,7 баллов.

1.4. Центральные моменты и формы распределения признака

В теории вероятностей распределения признака характеризуются моментами распределения. Бывают начальные, центральные и относительные моменты. Они представляют собой среднюю сумму степенной функции отклонений от некоторой величины z:

$$\mu_z = \sum_{i=1}^{n} (x_i - z)^k / n,$$

здесь z – центр отклонения, k – степень отклонения (порядок момента m_k), обычно k=1, 2, 3, 4.

Начальные центральные моменты получаем при $z = \bar{x}$ и k=0. При k=2, 3, 4 – моменты второго, третьего и четвертого порядка.

Центральные моменты используются при исследовании формы распределения признака, в частности, при установлении общего характера распределения.

Однородные выборки, как правило, одномодальные (рис. 1.4 (а)). На рис. 1.4 (б) показан вариант двухмодальной выборки.

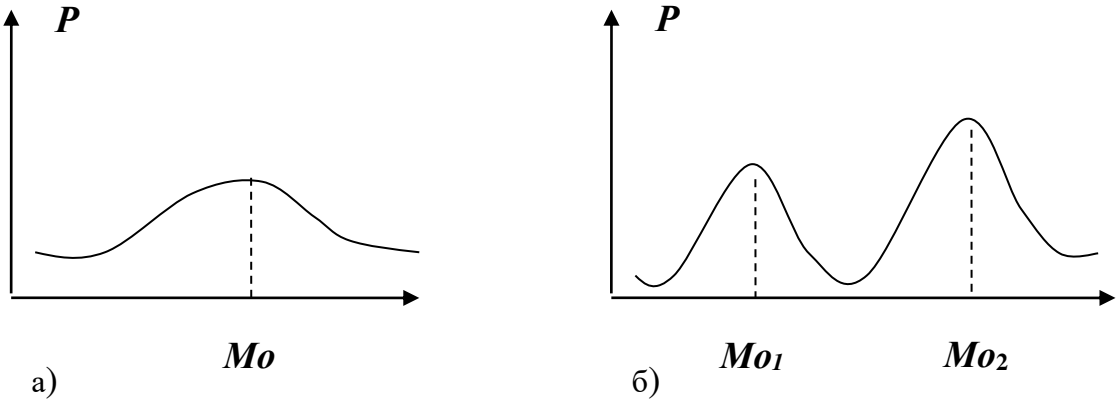


Рис. 1.4. **Формы распределения признака.**

В симметричных распределениях $\bar{x} = Mo = Me$. В случае правосторонней асимметрии $\bar{x} > Me > Mo$, A>0; в случае левосторонней, наоборот, $\bar{x} < Me < Mo$, $A < 0$; количественной оценкой меры асимметрии служит оценка $A = \mu^3 / \sigma^3$.

Теоретически коэффициент асимметрии не имеет границ, однако на практике его значение не бывает очень большим и в меру скошенных распределениях не превышает по модулю 1.

Для измерения островершинности кривой распределения используется стандартизированный момент четвертого порядка

$$E = \mu^4 / \sigma^4$$

Для симметричного, близкого к нормальному распределению E=3. Очевидно при островершинном распределении E>3; при плоском E<3.

Существенность асимметричности кривой распределения определяют по среднеквадратичному отклонению $\sigma_{A_S} = \sqrt{\dfrac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}}$ и отношению $|A_S| / \sigma_{A_S}$. Если $|A_S| / \sigma_{A_S}$ >3, то асимметрия существенная. Для симметричных распределений существенность эксцесса определяют по отношению $|E_x| / \sigma_{E_x}$, где: $E_x = \mu_4 / \sigma^4 - 3$ $\quad \sigma_{E_x} = \sqrt{\dfrac{24n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2(n+3)(n+5)}}$.

При $|E_x| / \sigma_{E_x} > 3$ эксцесс является существенным.

Таким образом, эмпирическое распределение может быть отнесено к типу нормального, если $|A_S|/\sigma_{A_S}$ <3 и $|E_x|/\sigma_{E_x} < 3$ [5].

Для классического нормального распределения Гаусса кривая распределения имеет вид

$$f(x) = e^{\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} / \sigma\sqrt{2\pi}\,.$$

В таблицах чаще всего дают значения нормированного закона распределения:

$$f(x) = e^{\frac{z^2}{2}} / \sigma\sqrt{2\pi},$$

где: $\sigma = 1, \quad z = (x - \bar{x})/\sigma.$

При нормальном распределении распределение величины относительно $\bar{x}$ – симметричное, величина максимума равна $1/\sigma\sqrt{2\pi}$, кривая распределения приближается к оси абсцисс и имеет точки перегиба на расстоянии $\pm\sigma$ от $\bar{x}$. При $\bar{x} = const$ с ростом σ кривая становится более пологой, а при $\sigma = const$ с изменением $\bar{x}$ форма кривой сохраняется, но наблюдается сдвиг ее вдоль оси *X*. При этом в средине интервала $\bar{x} \pm \sigma$ находится 68,25% единиц распределения; в средине интервала $\bar{x} \pm 2\sigma$ находится 95,45%, а в средине $\bar{x} \pm 3\sigma$ находится 99,73% единиц распределения (рис. 1.5).

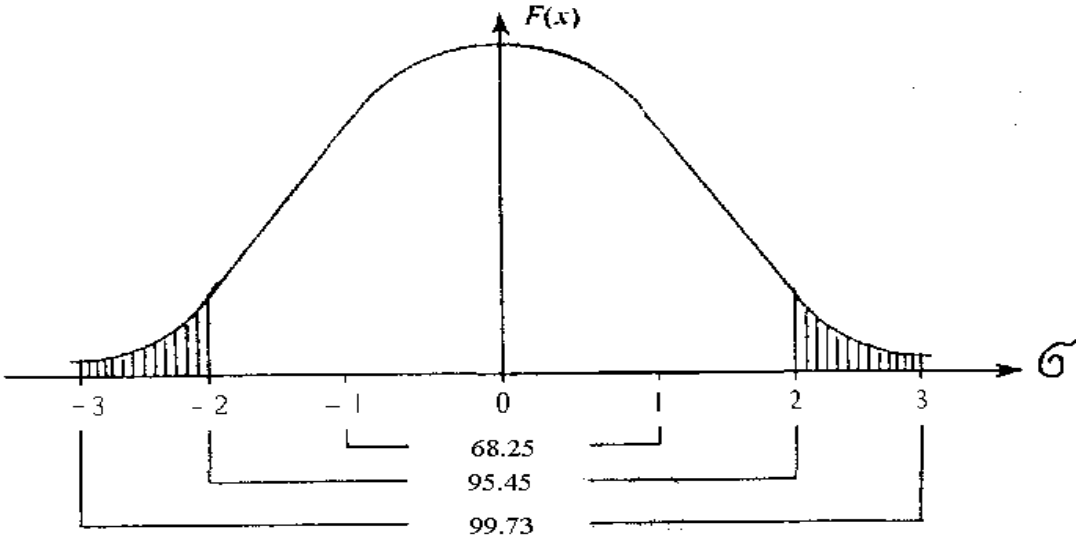


Рис. 1.5. **Соотношение вероятностей и ширины доверительных границ (%)**

Ниже в табл. 1.5-1.9 приведены наиболее часто используемые на практике законы распределения – Гаусса (нормальное), Стьюдента (*t*-распределение), Пирсона (хи-квадрат), Фишера (*F*-распределение) [9].

Таблица 1.5

Законы распределения – Гаусса (нормальное),
Стьюдента (*t*-распределение), Пирсона (хи-квадрат),
Фишера (*F*-распределение)

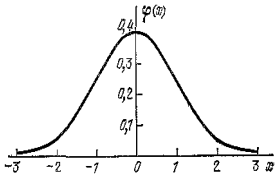
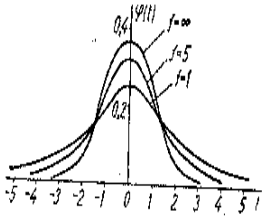
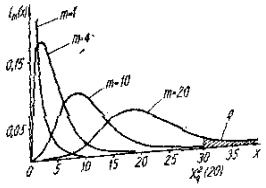
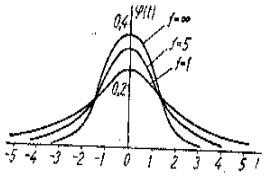
Название	Вид зависимости	График
Нормальное	$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$, $\bar{x}$ – среднее арифметическое значение признака; σ - среднее квадратичное отклонение.	
t-распределение	$S_n(t) = P\{t_n < t\} = K_n \int_{-\infty}^{t} (1 + \frac{u^2}{n})^{-\frac{(n+1)}{2}} du,$ $K_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}.$ Γ- гамма-функция; n - число степеней свободы	
хи-квадрат	$l_m(x) = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2} - 1\right)!} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ $0 \le x \le \infty$; m - число степеней свободы	
F-распределение	$F(x; v_1, v_2) = \frac{\Gamma((v_1 + v_2)/2)}{\Gamma(v_1/2)\Gamma(v_2/2)} v_1^{v_1/2} v_2^{v_2/2}$ $\int_0^x y^{v_1/2-1} (v_2 + v_1 y)^{-(v_1+v_2)/2} dy$ Γ – гамма-функция ($x \ge 0$); x – уровень значимости; v_1, v_2 – степени свободы	

Таблица 1.6

Плотность вероятности нормального распределения $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3964	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3830	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3653	3687	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3129	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0801
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0554
2.0	0.0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0395	0387	0379	0371	0368
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0191	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0080	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0068	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0057	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001

Таблица 1.7

Критическое значения *t*-критерия Стьюдента для заданного числа степеней свободы и вероятностей допустимых ошибок, равных 0.05; 0.01 и 0.001

Число степеней свободы (n_1+n_2-2)	Вероятность допустимой ошибки		
	0.05	0.01	0.001
	Критические значения показателя *t*		
4	2.78	5.60	8.61
5	2.58	4.03	6.87
6	2.45	3.71	5.96
7	2.37	3.50	5.41
8	2.31	3.36	5.04
9	2.26	3.25	4.78
10	2.23	3.17	4.59
11	2.20	3.11	4.44
12	2.18	3.05	4.32
13	2.16	3.01	4.22
14	2.14	2.98	4.14
15	2.13	2.96	4.07
16	2.12	2.92	4.02
17	2.11	2.90	3.97
18	2.10	2.88	3.92
19	2.09	2.86	3.88
20	2.09	2.85	3.85
21	2.08	2.83	3.82
22	2.07	2.82	3.79
23	2.07	2.81	3.77
24	2.06	2.80	3.75
25	2.06	2.79	3.73
26	2.06	2.78	3.71
27	2.05	2.77	3.69
28	2.05	2.76	3.67
29	2.05	2.76	3.66
30	2.04	2.75	3.65
40	2.02	2.70	3.55
50	2.01	2.68	3.50
60	2.00	2.66	3.46
80	1.99	2.64	3.42
100	1.98	2.63	3.39

Таблица 1.8

Критерий *F* для уровней значимости 0.05 и 0.01

N'	Число степеней свободы для большей дисперсии															
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	16	24	40	100	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	249	251	253	254
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6169	6234	6286	6334	6366
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.36	19.37	19.38	19.39	1941	1943	1945	19.47	19.49	19.50
	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.84	99.36	99.38	99.40	99.42	99.44	99.40	99.48	99.49	99.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.38	8.84	8.81	8.78	8.74	8.69	8.64	8.60	8.56	8.53
	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	27.83	26.60	26.41	26.23	26.12
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.84	5.77	5.71	5.66	5.63
	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.54	14.37	14.15	13.93	13.74	13.57	13.46
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.78	4.74	4.68	4.60	4.53	4.46	4.40	4.36
	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.45	10.27	10.15	10.05	9.89	9.68	9.47	9.29	9.13	9.02
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.03	4.00	3.92	3.84	3.77	3.71	3.67
	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.52	7.31	7.14	6.99	6.88
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.63	3.57	3.49	3.41	3.34	3.28	3.23
	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	7.00	6.34	6.71	6.62	6.47	6.27	6.07	5.90	5.75	5.65
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.34	3.28	3.20	3.12	3.05	2.98	2.93
	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.19	6.03	5.91	5.82	5.67	5.48	5.28	5.11	4.96	4.36
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.07	2.98	2.90	2.82	2.76	2.71
	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.62	5.47	5.35	5.26	5.11	4.92	4.73	4.56	4.41	4.31
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.97	2.91	2.82	2.74	2.67	2.59	2.54
	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.21	5.06	4.95	4.85	4.71	4.52	4.33	4.17	4.01	3.91
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.92	2.85	2.80	2.76	2.69	2.60	2.50	2.42	2.35	2.30
	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.65	4.50	4.39	4.30	4.16	3.98	3.78	3.61	3.46	3.36
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65	2.60	2.63	2.44	2.35	2.27	2.19	2.13
	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.62	3.43	3.26	3.11	3.00
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.33	2.24	2.16	2.07	2.01
	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.37	3.18	3.01	2.86	2.75
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.25	2.15	2.07	1.98	1.92
	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.85	3.71	3.60	3.51	3.37	3.19	3.00	2.83	2.68	2.57

Примечание: N' – число степеней свободы для меньшей дисперсии.

Таблица 1.9

Граничные (критические) значения χ^2 - критерия, соответствующие разным вероятностям допустимой ошибки и разным степеням свободы

Число степеней свободы (m-1)	Вероятность допустимой ошибки		
	0.05	0.01	0.001
1	3.84	6.64	10.83
2	5.99	9.21	13.82
3	7.81	11.34	16.27
4	9.49	13.28	18.46
5	11.07	15.09	20.52
6	12.59	16.81	22.46
7	14.07	18.48	24.32
8	15.51	20.09	26.12
9	16.92	21.67	27.88
10	18.33	23.20	29.59
11	19.58	24.72	31.54
12	21.03	28.05	32.91
13	22.36	27.69	34.53
14	23.68	29.14	36.12
15	25.00	30.58	37.70

Ниже, рассмотрены конкретны случаи их применения.

1.5. Сравнение средних двух выборок

Сравнение средних двух выборок в практике применяется тогда, когда необходимо, например, установить, удался ли эксперимент, эффективна ли была предложенная методика улучшения показателей для изменения которых она предназначалась.

В этом случае задача сводится к определению выборочных средних и дисперсий по данным до и после эксперимента и для решения вопроса о том, отличаются ли средние значения статистически достоверно друг от друга, используют t-критерий Стьюдента. Его основная формула выглядит:

$$t = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{\left|\frac{\overline{S}_1^2}{n_1} + \frac{\overline{S}_2^2}{n_2}\right|}},$$

где x_1 – среднее значение переменной по одной выборке данных; x_2 – среднее значение переменной по другой выборке данных; $\overline{S}_1^2$ – выборочная дисперсия первой переменной (по первой выборке); $\overline{S}_2^2$ – выборочная дисперсия первой переменной (по второй выборке); n_1 – число частных значений переменной в первой выборке; n_2 – число частных значений переменной во второй выборке.

После того как при помощи приведенной выше формулы вычислен показатель t, по таблице 1.7 для заданного числа степеней свободы, равного n_1+n_2-2, и

избранной вероятности допустимой ошибки[1] находят нужное табличное значение *t* и сравнивают с ними вычисленное значение *t*. Если вычисленное значение *t* больше или равно табличному, то делают вывод о том, что сравниваемые средние значения из двух выборок действительно статистически достоверно различаются с вероятностью допустимой ошибки, меньшей или равной избранной.

Рассмотрим процедуру вычисления t-критерия Стьюдента и определения на его основе разницы в средних величинах на конкретных примерах.

ПРИМЕР 1.2.

Для выполнения сравнительного анализа уровня двигательной активности экспериментальных групп использовались данные уровня двигательной активности (ккал) (приложение А, протокол 2).

В результате проведенного исследования статистически значимые отличия уровня двигательной активности наблюдаются у юношей и девушек между ЭГ 1 и ЭГ 3 (α<0,05), между ЭГ 2 и ЭГ 3 (α<0,05; α<0,1 соответственно). Отличия исследуемого признака между ЭГ 1 и ЭГ 2, а также в ЭГ 2 и ЭГ 3 как юношей та и у девушек (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Статистические показатели уровня двигательной активности юношей и девушек экспериментальных групп

№	Экспериментальная группа	Уровень двигательной активности (ккал)	
		$\bar{x}$	*S*
Юноши			
1	ЭГ 1 (n=28)	2977,54	105,53
2	ЭГ 2 (n=14)	2945,86	112,57
3	ЭГ 3 (n=11)	2842,82	124,20
α_{1-2}		> 0,05	
α_{1-3}		< 0,05	
α_{2-3}		< 0,05	
Девушки			
1	ЭГ 1 (n=24)	2733,79	109,94
2	ЭГ 2 (n=20)	2764,05	109,95
3	ЭГ 3 (n=14)	2656,14	78,00
α_{1-2}		> 0,05	
α_{1-3}		< 0,05	
α_{2-3}		< 0,1	

ПРИМЕР 1.3.

Для выполнения сравнительного анализа уровня теоретико-методических знаний контрольной и экспериментальной групп использовался итоговый контроль при помощи контрольного тестирования. Данный контроль осуществляется с целью выявления эффективности авторской программы, в тестировании брали участие контрольные и экспериментальные группы (приложение А, протокол 1).

[1] Степени свободы и вероятность допустимой ошибки – специальные математико-статистические термины, содержание которых подробно рассматриваются в работах [5,8].

Уровень теоретико-методической подготовки в экспериментальных группах значительно выше, нежели в контрольных: у юношей 10-х и 11-х классов экспериментальных групп на 2,9 и 1,8 баллов (соответственно) выше от 10-х и 11-х классов контрольных групп, так у девушек 10-х и 11-х классов экспериментальных групп на 2,4 и 2,7 балла (соответственно) выше, чем у 10-х и 11-х классов контрольных групп. Средний бал по вопросам курса "Физическое здоровье" составил: в контрольных 10-х классах – 5,9 балов у юношей и 6,0 балов у девушек, в 11-х классах – 6,1 баллов у юношей и 5,7 баллов у девушек; в экспериментальных 10-х классах – 8,8 баллов у юношей и 8,4 баллов у девушек, в 11-х классах – 7,9 баллов у юношей и 8,6 баллов у девушек (табл. 1.11).

Таблица 1.11

Уровень теоретико-методических знаний по курсу "Физическое здоровье" контрольных и экспериментальных групп

Класс	Группа	Средний бал ($\bar{x} \pm S$)	t	α
Юноши				
10	ЭГ (n=22)	8,8 ± 1,23	7,168	<0,01
	КГ (n=25)	5,9 ± 1,59		
11	ЭГ (n=27)	7,9 ± 6,1	7,926	<0,01
	КГ (n=17)	6,1 ± 1,54		
Девушки				
10	ЭГ (n=28)	8,6 ± 1,83	5,824	<0,01
	КГ (n= 34)	6,0 ± 1,73		
11	ЭГ (n=32)	8,4 ± 2,10	5,197	<0,01
	КГ (n=19)	5,7 ± 1,70		

Определение статистически значимых отличий уровня знаний теоретико-методической подготовки между контрольными и экспериментальными 10-ми и 11-ми классами у юношей и девушек составил α <0,01.

ПРИМЕР 1.4.

Для выполнения сравнительного анализа уровня физической подготовленности до и после эксперимента контрольной и экспериментальной групп использовались результаты контрольного тестирования программы "Основы здоровья и физическая культура" (приложение А, протокол 4).

Данные материалы исследований (табл. 1.12, 1.13) дают возможность говорить, что до эксперимента уровень физической подготовленности контрольных и экспериментальных групп юношей и девушек находятся на одинаковом уровне, за исключением у юношей в тесте на выносливость, у девушек – на силу. Данные результаты подтверждаются тем, что не прослеживаются достоверные отличия (α_1 >0,05) между данными группами в тестах у юношей – на быстроту, силу, гибкость, ловкость и скоростно-силовых способностей, у девушек – на быстроту, выносливость, гибкость, ловкость и скоростно-силовых способностей. Однако, необходимо обратить внимание на достоверные отличия юношей в тесте на выносливость (α_1<0,01) и у девушек – на силу (α_1<0,05), поскольку в контрольных группах результат в данных тестах выше нежели в экспериментальных.

Таблица 1.12

Среднестатистические показатели уровня физической подготовленности юношей контрольной и экспериментальной групп (по тестам программы “Основы здоровья и физическая культура” до и после эксперимента)

Комплексный тест	Группа	До ($\bar{x} \pm S$)	α_1	После ($\bar{x} \pm S$)	α_2
Бег на 30 м, с	ЭГ (n=53)	4,69 ± 0,35	>0,05	4,59 ± 0,28	<0,01
	КГ (n=41)	4,60 ± 0,21		4,60 ± 0,22	>0,1
Бег на 2000 м, мин.	ЭГ (n=53)	8,80 ± 0,68	<0,01	8,56 ± 0,69	<0,01
	КГ (n=41)	8,25 ± 0,63		8,06 ± 0,70	<0,01
Наклон туловища вперед, см	ЭГ (n=53)	8,10 ± 6,60	>0,05	7,88 ± 5,65	>0,1
	КГ (n=41)	9,71 ± 4,03		8,29 ± 4,20	<0,05
Подтягивание, кол-во раз	ЭГ (n=53)	10,06 ± 4,74	>0,05	11,00 ± 4,57	<0,01
	КГ (n=41)	10,68 ± 3,99		10,34 ± 3,55	>0,05
“Челночный бег” 4х9 м, с	ЭГ (n=53)	9,85 ± 0,68	>0,05	9,62 ± 0,69	<0,01
	КГ (n=41)	9,86 ± 0,42		9,83 ± 0,46	>0,1
Прыжок в длину с места, см	ЭГ (n=53)	209,34 ± 21,28	>0,05	215,28 ± 1 7,95	<0,01
	КГ (n=41)	214,20 ± 16,12		215,15 ± 17,22	>0,05

В результате анализа результатов контрольного тестирования после эксперимента, отмечалось наличие достоверного прироста юношей и девушек в экспериментальных группах при α_2<0,01. У юношей экспериментальной группы такой прирост наблюдался в тестах на оценку уровня быстроты, выносливости, силы, ловкости и скоростно-силовых способности (табл. 1.12), у девушек - во всех контрольных тестах (табл. 1.13). Отсутствие прироста у юношей в контрольном тесте на гибкость можно аргументировать тем, что при процессе проведения практических занятий не планировалось значительное количество физических упражнений на гибкость.

Таблица 1.13

Среднестатистические показатели уровня физической подготовленности юношей контрольной и экспериментальной групп (по тестам программы “Основы здоровья и физическая культура” до и после эксперимента)

Комплексный тест	Группа	До ($\bar{x}$±S)	α_1	После ($\bar{x}$±S)	α_2
Бег на 30 м, с	ЭГ (n=58)	5,44±0,28	>0,05	5,31±0,32	<0,01
	КГ (n=78)	5,41±0,28		5,38±0,30	>0,05
Бег на 2000 м, мин.	ЭГ (n=58)	11,75±0,98	>0,05	11,53±0,92	<0,01
	КГ (n=78)	11,90±0,79		11,78±1,72	<0,01
Наклон туловища вперед, см	ЭГ (n=78)	13,68±5,81	>0,05	14,84±5,86	<0,01
	КГ (n=58)	13,85±5,61		13,94±5,26	>0,05
Подтягивание в висе лежа на низкой перекладине высотою 90 см, кол-во раз.	ЭГ (n=58)	10,69±6,91	<0,05	14,71±5,53	<0,01
	КГ (n=78)	14,00±5,84		15,08±5,66	<0,05
“Челночный бег” 4х9 м, с	ЭГ (n=58)	11,54±0,49	>0,05	11,30±0,51	<0,01
	КГ (n=78)	11,46±0,65		11,50±0,58	>0,05
Прыжок в длину с места, см	ЭГ (n=58)	164,80±11,02	>0,05	170,30±9,26	<0,01
	КГ (n=78)	160,20±12,60		160,40±12,32	>0,05

В контрольных группах у юношей отмечается улучшения результатов в контрольных тестах на гибкость, а у девушек – в контрольном тесте на силу при α_2<0,05. Необходимо отметить, что у юношей и девушек произошел значительный прирост в контрольном тесте на выносливость при α_2<0,01 (табл. 1.12, 1.13).

Распределение Стьюдента используется так же для оценки ошибки определения среднего генеральной совокупности по конкретной выборке. Для оценки возможных границ ошибки малой выборки используется отношение Стьюдента:

$$t = \frac{\tilde{x} - \bar{x}}{\mu},$$

где $\tilde{x}, \bar{x}$ – среднее арифметическое данной выборки и генеральной совокупности, соответственно;

$$\mu = \frac{S}{\sqrt{n-1}}; \quad S^2 = \sum (x_i - \tilde{x})^2 / n.$$

Здесь $t \cdot \mu$ – ошибка средней. При этом $t_{k,\alpha}$ определяется из таблицы распределения Стьюдента 1.6 для $k = n$-1 степеней свободы и вероятностью (P=1-α).

1.6. Сравнение частотных распределений

Иногда в процессе проведения эксперимента возникает специальная задача сравнения не абсолютных значений некоторых величин до и после эксперимента, а частотных распределений данных. Рассмотрим пример представленный в работе [5].

Допустим, что для экспериментального исследования была взята выборка из 100 студентов и с ними проведен формирующий эксперимент. Предположим также, что до эксперимента 30 человек успевали на «удовлетворительно», 30 – на «хорошо», а остальные 40 – на «отлично». После эксперимента ситуация изменилась. Теперь на «удовлетворительно» успевают только 10 учащихся, на «хорошо» - 45 учащихся и на «отлично» - остальные 45 учащихся. Можно ли, опираясь на эти данные, утверждать, что формирующийся эксперимент, направленный на улучшение успеваемости, удался?

Для ответа на данный вопрос можно воспользоваться статистикой, называемой χ^2-критерий (хи-квадрат критерий). Его формула выглядит следующим образом:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{V_k - P_k}{P_k} \right)^2,$$

где: P_k – частоты результатов наблюдений до эксперимента; V_k – частоты результатов наблюдений, сделанных после эксперимента; m – общее число групп, на которые разделились результаты наблюдений.

Воспользуемся приведенным выше примером для того, чтобы показать, как работает хи-квадрат критерий. В данном примере переменная P_k принимает следующие значения: 30%, 30%, 40%, а переменная V_k – такие значения: 10%, 45%. 45%.

Подставим все эти значения в формулу для χ^2 и определим его величину:

$$\chi^2 = \frac{(10-30)^2}{30} + \frac{(45-30)^2}{30} + \frac{(45-40)^2}{40} = 21.5$$

Воспользуемся теперь таблицей 1.7, где для заданного числа степеней свободы можно выяснить степень значимости образовавшихся различий до и после

эксперимента в распределении оценок. Полученное нами значение χ^2=21.5 больше соответствующего табличного значения *m*-1=2 степеней свободы, составляющего 13.82 при вероятности допустимой ошибки меньше чем 0.1%. Следовательно, гипотеза о значимых изменениях, которые произошли в оценках учащихся в результате введения новой программы или новой методики обучения, экспериментально подтвердились: успеваемость значительно улучшилась, и это мы можем утверждать, допуская ошибку, не превышающую 0.1%.

Аналогично χ^2– распределение используется для оценки соответствия эмпирического частотного распределения соответствующему теоретическому. При этом статистически χ^2 вычисляется по формуле:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{m_1} \left(\frac{P_к^э - P_к^T}{P_к^{\ T}} \right)^2,$$

где $P_к$ - частости эмпирического и теоретического распределения, *m* – количество интервалов

1.7. Сравнение дисперсий двух выборок

Эта задача чаще всего решается в случае, когда необходимо оценить эффективность предлагаемой методики усовершенствования показателей с точки зрения улучшения их стабильности.

Пусть, например, до эксперимента колеблемость нормально распределенного показателя для выборки объема n_1 оценивалась дисперсией σ_1^2, а после эксперимента - σ_2. Объем выборок – n_2. Равенство $n_1 = n_2$ не обязательно. В этом случае сравнение двух дисперсий оценивается по отношению $F_Э = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$, в числителе берется большая дисперсия. Если полученное эмпирическое значение $F_Э > F_{табл.}$ при $n_1 + n_2 - 2$ степеней свободы, то с заданной вероятностью *P* можно считать, что исследуемый показатель стал более стабильным, что подтверждает эффективность применяемой методики.

Сквозной алгоритм вычисления основных характеристик выборки

1. Характеристики выборки
   - минимальное значение ряда X_{min}
   - максимальное значение ряда X_{max}
   - размах $R=X_{min}-X_{max}$
   - медиана $X_n/2$
   - мода *X* (*наблюдаемое наиболее часто)*

2. Среднее значение $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) / n$

3. Среднеквадратичное отклонение (СКО) $\sigma = \sqrt{Д_x}$

4. Дисперсия $Д_x = \sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \right) / n$

5. Несмещенная оценка дисперсии $\sigma_н^2 = n\sigma^2 / (n-1)$

6. Среднеквадратичное отклонение для несмещенной оценки дисперсии $S = \sigma_н = \sqrt{\sigma_н^2}$

7. Ошибка среднего $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n-1}} = \mu_{\bar{x}}$

8. Доверительный интервал для $\bar{x}$ $\Delta\bar{x} = t_{(\alpha, n-1)} \cdot \sigma_{\bar{x}}$

9. Среднее линейное отклонение $l_o = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}| \right) / n$

10. Моменты начальные:

второго, третьего, четвертого порядка $v^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right) / n; v^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3 \right) / n$

$$v^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4 \right) / n$$

11. Моменты центральные:

третьего, четвертого порядка $\mu^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^3 \right) / n; \mu^4 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^4 \right) / n$

12. Коэффициент асимметрии: $A_s = \mu^3 / \sigma^3$

несмещенная оценка $A_s' = \left[((n-1)n^{1/2} / (n-2) \right] A_s$

СКО $S_A = \left[6n(n-1) / (n-2)(n+1)(n+3) \right]^{1/2}$

13. Показатель эксцесса $E = \mu^4 / \sigma^4$ (= 3 норм. распред.)

несмещенная оценка $E = \left[(n-1) / (n-3) \right] \times \left[(+1)E + 6 \right]$

СКО $S_E = \left[24n(n-1)^2 / (n-3)(n-2)(n+3)(n+5) \right]^{1/2}$

14. Коэффициенты вариации:

по размаху $R/\bar{x}$

по среднему линейному отклонению $l_o/\bar{x}$

по СКО $\sigma/\bar{x}$

15. Сравнение выборочных средних: $t_{расч.} = \dfrac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}}$

Различие существенно с уровнем значимости α, если $t_{расч.} \rangle t_{табл.}(\alpha, n_1 + n_2 - 2)$

16. Сравнение дисперсий: $F_{расч.(\alpha, n_1-1,\, n_2-1)} = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$ (большая дисперсия),

если $F_{расч.} \rangle F_{табл.}$ - дисперсии отличаются существенно на уровень значимости α.

РАЗДЕЛ 2
ВЫЯВЛЕНИЕ СКРЫТЫХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ

Все явления в окружающей жизни являются взаимосвязанными. В сложном переплетении взаимосвязей некоторые показатели являются непосредственным следствием определенного множества причин или сами являются причиной изменения других. Для выявления таких связей в статистике используются методы корреляционно-регрессионного анализа. Наряду с причинными связями существуют параллельные явления, на которые влияет общая, иногда скрытая причина (фактор), которая обуславливает косвенную взаимосвязь ряда показателей.

Выявление таких скрытых факторов является задачей факторного анализа.

2.1. Корреляционно-регрессионный анализ

Корреляционно-регрессионный анализ – это раздел математической статистики, позволяющей свести частные, разрозненные данные к некоторой обобщающей зависимости и получить возможность по значению одной из переменной x с определенной вероятностью определять значение другой y. Простейшим способом отражения корреляции является корреляционное поле (рис.2.1). если изменение такое, что с увеличением (уменьшением) одного признака второй также увеличивается (уменьшается), корреляция называется прямой или положительной. Если с увеличением первого второй уменьшается – корреляция обратная (отрицательная).

Корреляционное поле отражает связь между признаками весьма приближенного, ориентируясь на ее визуальное представление. Для более точной оценки корреляции (тесноты связи) в статистике используется коэффициент корреляции, вычисляемый по формуле:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

где: r_{xy} – коэффициент корреляции признаков x и y; x_i, y_i – значения признаков;

$\bar{x}, \bar{y}$ – средние арифметические обоих признаков; n – объем выборки.

Показатель r_{xy}^2 называют индексом детерминации, который характеризует часть факторной дисперсии в общей дисперсии σ_y^2, т.е. показывает, какая часть в общей вариации результативного признака y порождается исследуемым показателем x.

Коэффициент корреляции находится в пределах: $-1 \le r_{xy} \le 1$. Из равенства (используя формулу) и рис. 2.1 можно сделать такие выводы:

1. Если $r_{xy}=0$, связь между x и y либо отсутствует рис. 2.1 (А), либо она явно нелинейная рис. 2.1 (Е).
2. Если $r_{xy}=\pm 1$, связь между признаками функциональная.
3. Чем r_{xy} ближе к нулю, тем связь слабее, чем ближе к единице, тем теснее. Приятно считать [3], что если r_{xy}=0.2 … 0.49 – связь слабая, r_{xy}=0.5 … 0.69 – средняя и r_{xy}=0.7 … 0.99 – тесная.

4. Если получен очень малый коэффициент корреляции, а связь по характеру изучаемого явления должна быть, то это можно объяснить не учитываемыми переменными или влиянием сильных помех, которые заглушают влияние изучаемых переменных.

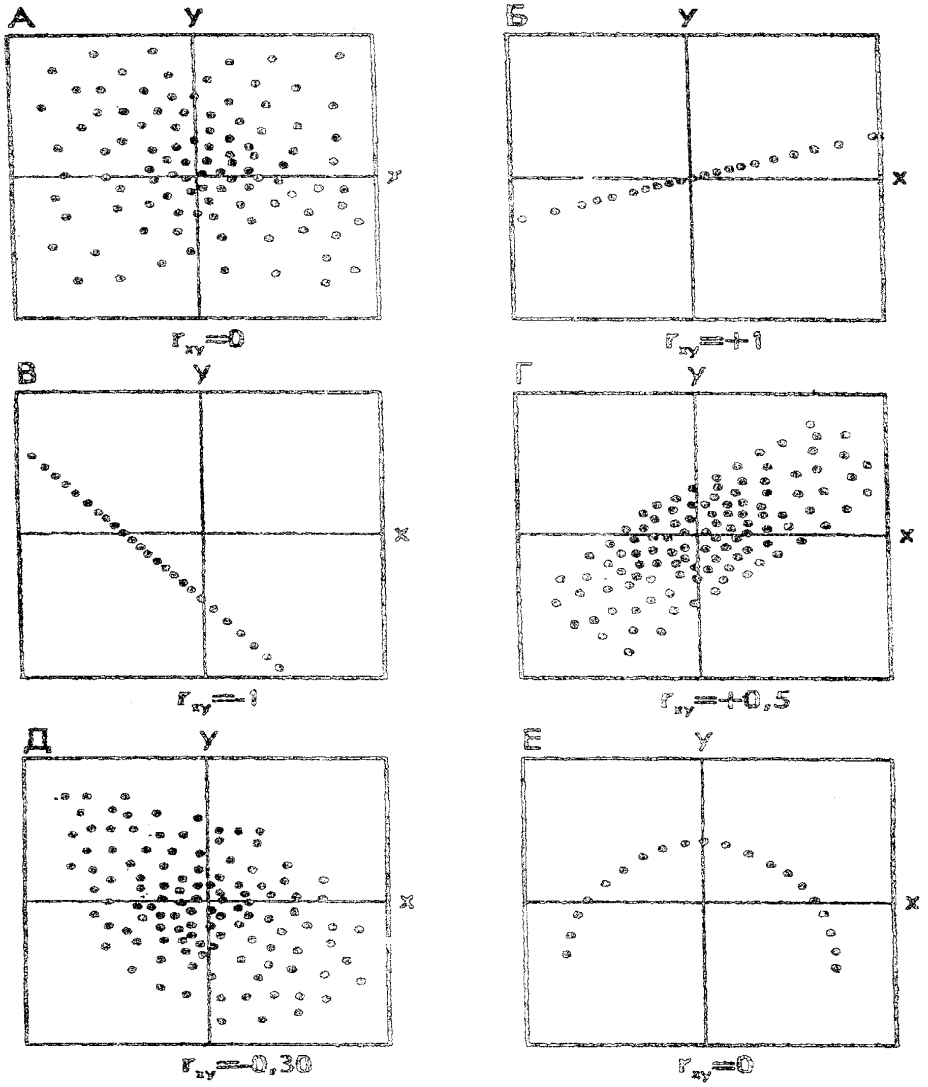


Рис. 2.1. **Схематическое представление различных корреляционных зависимостей с соответствующими значениями коэффициента линейной корреляции** (Цит.по: Иберла К. Факторный анализ. –М.,1980).

Для качественных признаков (бальные и экспертные оценки, места в соревнованиях и т.д.) вместо коэффициента корреляции используют коэффициент ранговой корреляции:

$$R = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i n}{n(n-1)},$$

где: d_i^2 – разница между рангами показателей одних и тех же испытуемых упорядоченных по возрасту.

Форма связи между показателями x_i и y_i определяется кривой регрессии. Корреляционный анализ предусматривает линейную связь. При парной связи теоретическое уравнение регрессии имеет вид

$$y = \bar{y} + r_{xy}\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}}}(x - \bar{x}) \tag{2.2}$$

Если выразить отклонение переменных от своей средней в единицах среднеквадратичного отклонения, то получим стандартизованное значение переменных

$$Z_x = \frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}; \quad Z_y = \frac{y=\bar{y}}{\sigma_y}, \tag{2.3}$$

а уравнение регрессии примет вид

$$Z_y = r_{xy}Z_x \tag{2.4}$$

При этом тангенс угла наклона прямой определяется коэффициентом корреляции. Если при просмотре корреляционного поля от переменной x обнаружена явная нелинейная связь, то с помощью некоторых преобразований соответствующей заменой переменных ее можно линеаризовать применить методику корреляционного анализа. Наиболее часто применяемые выражения имеют вид:

$$y = ab^x \to y' = \alpha + bx', \quad x' = \ln x, \quad y' = \ln y, \quad \alpha = \ln a \tag{2.5}$$

$$y = \frac{1}{ax+b} \to y' = ax + b, \quad y' = \frac{1}{y'} \tag{2.6}$$

$$y = \frac{x}{ax+b} \to y' = ax + b, \quad y' = \frac{x}{y'} \tag{2.7}$$

$$y = a\ln x + b \to y' = ax + b, \quad x' = \ln x \tag{2.8}$$

$$y = \exp(a_0 + ax) \to y' = a_0 + ax, \quad y' = \ln y \tag{2.9}$$

Удачный подбор эмпирической формулы в значительной мере, как уже указывалось ранее, зависит от опыта и знания физической сущности исследуемых зависимостей. Очень полезным при решении задач такого типа может быть геометрическое изображение полученных данных в декартовых координатах или в специальных системах координат (полулогарифмической, логарифмической и т.д.). В табл. 2.2 представлены графики кривых и способы их линеаризации представленные в работе. В двумерном случае или в пошаговом регрессионном анализе используется для генерации моделей оптимальной структуры банк кривых типа (2.5)–(2.9) или полиномы высших степеней, которые легко линеаризуются заменой $x' = x_j^k x_i$.

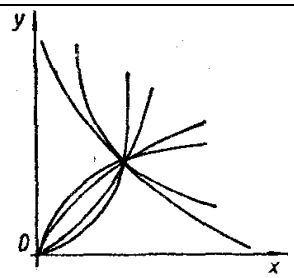
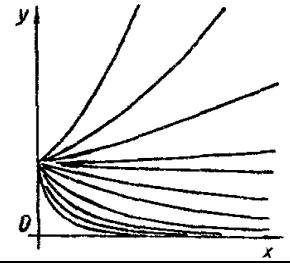
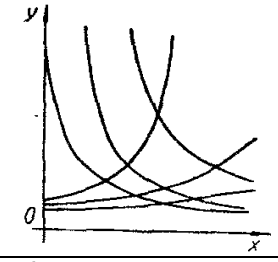
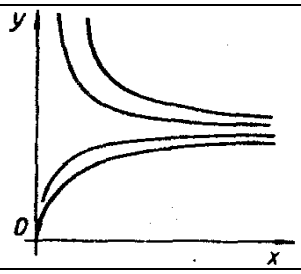
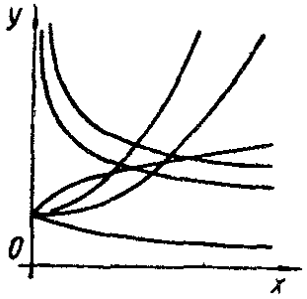
Значимость коэффициента корреляции определяется с помощью t-критерия Стьюдента:

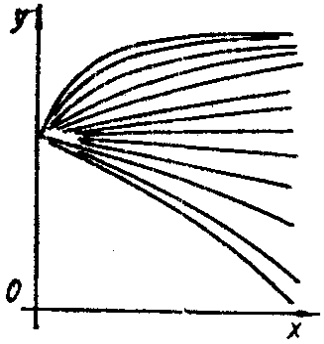
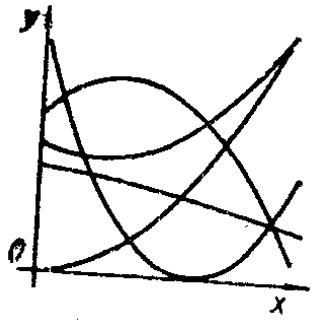
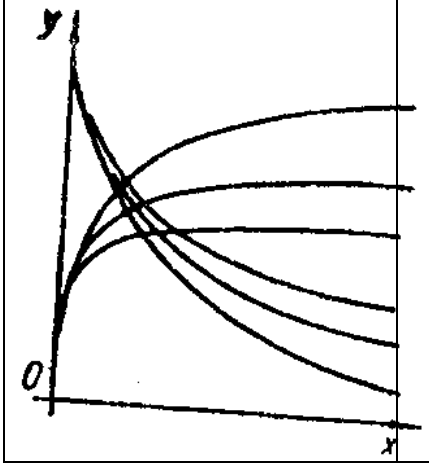
$$t_{r_{xy}} = r_{xy}\sqrt{\frac{n-2}{1-r_{xy}^2}} \tag{2.10}$$

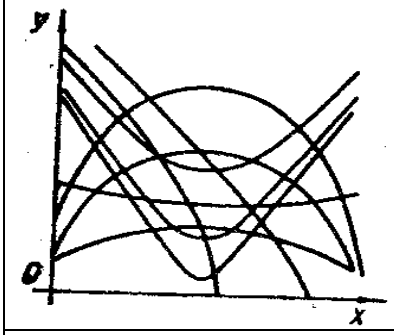
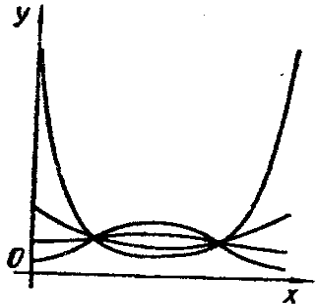
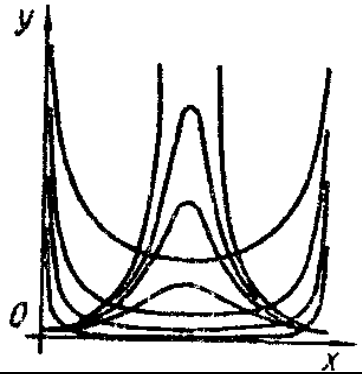
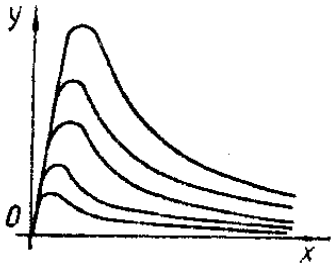
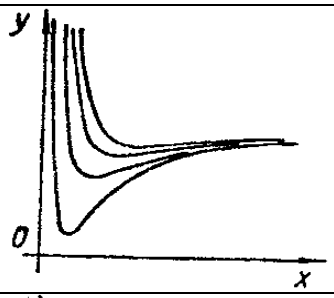
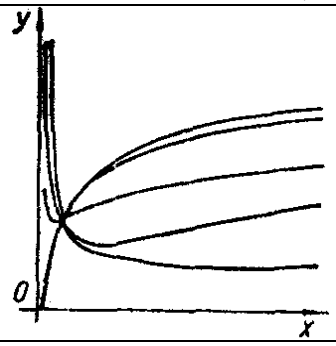
Оценка $t_{r_{xy}}$ должна быть больше табличного $t_{k,\alpha}$ ($k=n-2$ – число степеней свободы, α - уровень значимости, например α=0,05).

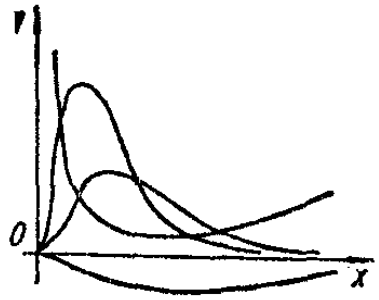
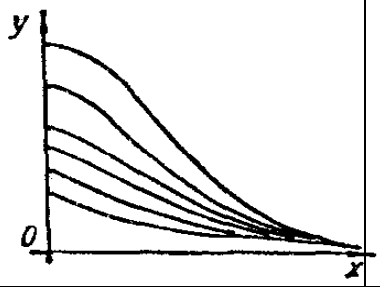
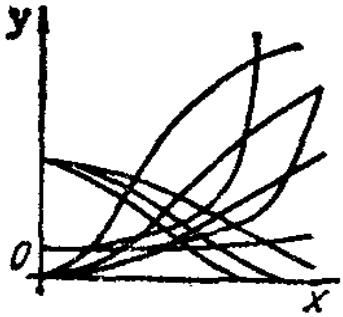
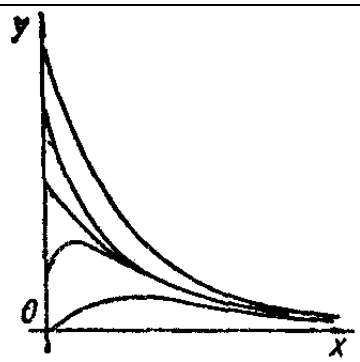
Таблица 2.2.

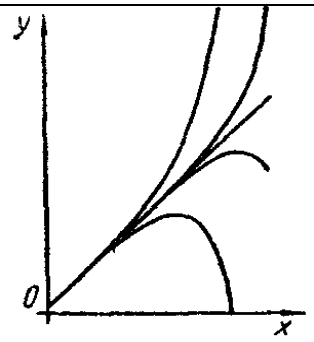
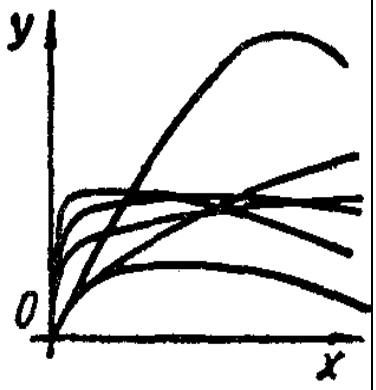
Графики кривых и приемы их линеаризации*

Типичные кривые	Формула	Способы выравни-вания	Линейные уравнения, получаемые при выравнивании	Примечания
	I $y=ax^b$ (график дан для a=const)	X=lgx Y=lgy	Y=$lga+bX$	
	II $y=ae^{bx}$ (график дан для a=const)	Y=lgy	Y=lga $+0,4343bx$	
	III $y=\frac{1}{a+bx}$	$Y=\frac{1}{y}$	Y=$a+bx$	
	IV $y=\frac{x}{a+bx}$	$Y=\frac{x}{y}$	Y=$a+bx$	
	V $y=c+ax^b$	Если b известно: X=x^b. Если b неизвестно, находят c (см.приме-чание) и тогда X=lgx, Y=$lg(y-c)$	$y=c+ax$ $Y=lga+bX$	Кривые, аналогичные кривым формулы 1, но смещенные в направлении оси OY. Для определения c на заданной кривой берут две точки с произвольными абсциссами x_1 и x_2 и соответственными ординатами y_1 и y_2 и третью точку с абсцисой $x_3=\sqrt{x_1x_2}$ и ординатой y_3;

				$c=\dfrac{y_1y_2-y_3^2}{y_1+y_2-2y_3}$
	VI $y=c+ae^{bx}$ (график дан для c=const и a<0)	Находят c (см.примечание) и тогда $Y=lg(y-c)$	$Y=lga+$ $+0,4343bx$	Кривые, аналогичные кривым формулы 1, но смещенные в направлении оси OY. Для определения c на заданной кривой берут две точки с произвольными абсциссами x_1 и x_2 и соответственными ординатами y_1 и y_2 и третью точку с абсцисой $x_3=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ и ординатой y_3; $c=\dfrac{y_1y_2-y_3^2}{y_1+y_2-2y_3}$
	VII $Y=a+bx+$ cx^2	$Y=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ где x_1 и y_1- координаты произвольной точки заданной кривой. При выборе значений x, образующих арифметическую прогрессию с разностью h. $Y=\Delta y=$ $y_{i+1}-y_i$	$Y=(b+$ $+cx_1)+$ $+cx$ $Y=(bh+$ $+ch)^2+$ $+2chx$	После определения b и c находят a из равнения $\sum y=na+b\sum x+$ $+c\sum x^2,$ где n – число заданных значений x
	VIII $y=\dfrac{a+bx}{c+dx}$	$Y=\dfrac{x-x_1}{y-y_1}$	$Y=A+$ $+Bx$	Вместо коэффициентов a, b, c и d определяют A и B и представляют эмпирическую формулу в виде $y=y_1+\dfrac{x-x_1}{A+Bx}$

	IX $y^2 = a +$ $+ bx + cx^2$			Введением новой переменной $Z=y^2$ приходят к формуле VII
	X $y = ae^{bx+cx^2}$ или $\lg y = \lg a +$ $+ 0{,}4343bx +$ $+ 0{,}4343cx^2$			Введением новой переменной $Z=lgy$ приходят к формуле VII
	XI $y =$ $= \dfrac{1}{a + bx + cx^2}$			Введением новой переменной $Z= \dfrac{x}{y}$ приходят к формуле VII
	XII $y =$ $= \dfrac{x}{a + bx + cx^2}$			Введением новой переменной $Z= \dfrac{x}{y}$ приходят к формуле VII
	XIII $y = a +$ $+ \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2}$			Введением новой переменной $Z= \dfrac{1}{x}$ приходят к формуле VII
	XIV $y = a + b\lg x +$ $+ c\lg^2 x$			Введением новой переменной $Z=lgy$ приходят к формуле VII

	XV $y = ax^b e^{cx}$	При выборе значений x, образующих арифметическую прогрессию с разностью h, $X = \Delta \lg x,$ $Y = \Delta \lg y$	$Y=$ $=0,4343 \cdot hc+b$ X	После определения b и c находят a из уравнения $\sum \lg y = n \lg a +$ $+ b \sum \lg x +$ $+ 0,4343c \times \sum x$ где n-число заданных значений x
	XVI $y = ae^{bx^c}$ (график дан для $b>0$)			Введением новой переменной $Z=lgy$ приходят к формуле V
	XVII $y = ae^{be^{cx}}$			Введением новой переменной $Z=lgy$ приходят к формуле VI
	XVIII $y = ae^{bx} +$ $+ ce^{dx}$	При выборе значений x, образующих арифметическую прогрессию с разностью h, $X = \frac{y_1}{y},$ $Y = \frac{y_2}{y},$ где y, y_1 и y_2-ординаты точек кривой для каких-либо трех последовательных значений абсцисс x, x_1 и x_2	$Y = (e^{bh} +$ $+ e^{dh})x -$ $- e^{bh} e^{dh}$	Приведенное в предыдущей графе линейное уравнение позволяет определить коэффициенты b и d, после чего для определения a и c вновь производят выравнивание с помощью переменных $X' = e^{(b-d)x},$ $Y' = ye^{-dx},$ получая линейное уравнение $Y' = c + aX'$

	XIX $y = a + bx +$ $+ ce^{dx}$ (график дан для $a=const$ и $b=const$)	При выборе значений x, образующих арифметическую прогрессию с разностью h, $Y = \lg \Delta^2 y$	$Y = \lg c \times$ $\times (e^{dh} -$ $-1)^2 +$ $0{,}4343dx$	После определения коэффициентов c и d производят новое выравнивание, принимая $Y' = y - ce^{dx}$ и получая линейное уравнение $Y' = a + bx,$ из которого определяют a и b
	XX $y = ax^b +$ $+ cx^d$ (график дан для $b>0$ и $d>0$)	$X = \frac{y_1}{y}$ $Y = \frac{y_2}{y}$, где y, y_1 и y_2- ординаты точек кривой для каких-либо трех последовательных значений абсцисс x, x_1 и x_2, образующих геометрическую прогрессию с знаменателем q	$Y = q^b +$ $+ q^d)X -$ $- q^{b+d}$	После определения коэффициентов b и d производят новое выравнивание, принимая $X' = x^{d-b}$, $Y' = yx^{-b}$ и получая линейное уравнение $Y' = a + cX',$ из которого определяют a и c
Графики кривых могут иметь различную форму	XXI $y = a_0 + a_1 x +$ $+ a_2 x^2 + \ldots +$ $+ a_{n-1} \times x^{n-1} +$ $+ a_n x^n$	$Y = \Delta^{n-1} y$, где n-порядок, дающий постоянное значение разностей при значениях аргумента, образующих арифметическую прогрессию с разностью h	$Y = (n -$ $-1)! h^{n-1} \times$ $\times (a_{n-1} +$ $+ \frac{n(n-1)}{2}$ $\times ha_n) +$ $n! h^{n-1} \times$ $\times a_{n^x}$	Из уравнения, приведенного в предыдущей графе, определяют коэффициенты a_n и a_{n-1} при высших степенях x. Затем, полагая $Z = y = a_n x^n -$ $- a_{n-1} x^{n-1}$, составляют новую рациональную функцию степени n-2: $Z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 +$ $+ \ldots + a_{n-3} x^{n-3} +$ $+ a_{n-2} x^{n-2}$ и тем же способом определяют a_{n-2} и a_{n-3} и т.д. (Так как многочлены выше 4-й степени используются редко, то обычно уже после первого определения коэффициентов при высших степенях x (a_4 и a_3) приходят к формуле VII)

* таблица заимствована из книги Л.М. Батунера «Математические методы в химической технике». – Л.: «Химия», 1968.

Рассмотрим конкретные примеры корреляционного анализа между двумя и более показателей.

ПРИМЕР 2.1.

Проведение корреляционного анализа с целью определения взаимосвязи между уровнем знаний и двигательной активностью учащихся 10–11-х классов на общегрупповом уровне (выборка юношей n=53; девушек n=58).

Для выполнения корреляционного анализа использовались данные (приложение А, протокол 1):

- средний балл теоретико–методических знаний по вопросам физического здоровья (приложение А, протокол 1);

- уровень двигательной активности (ккал) (приложение А, протокол 2).

В результате исследования средний балл уровня знаний по вопросам физического здоровья на общегрупповом уровне у юношей составляет 7,8±0,71, у девушек–8,6±0,70 баллов, а уровень двигательной активности соответственно к регистрации данных индивидуальных карт по Фремингенскою методики – у юношей составил 2941,21±120,19 ккал, а у девушек – 2725,48±109,91 ккал.

Данный анализ показал, что между уровнем знаний и показателями двигательной активности, у данного контингента исследуемых, существует средняя статистическая взаимосвязь, поскольку коэффициент корреляции между данными показателями у юношей становил r=0,50, у девушек – r=0,62. Данные результаты имеют позитивную зависимость (r>0), которая указывает на то, что чем выше уровень знаний, тем выше уровень двигательной активности старшеклассников (рис. 2.2).

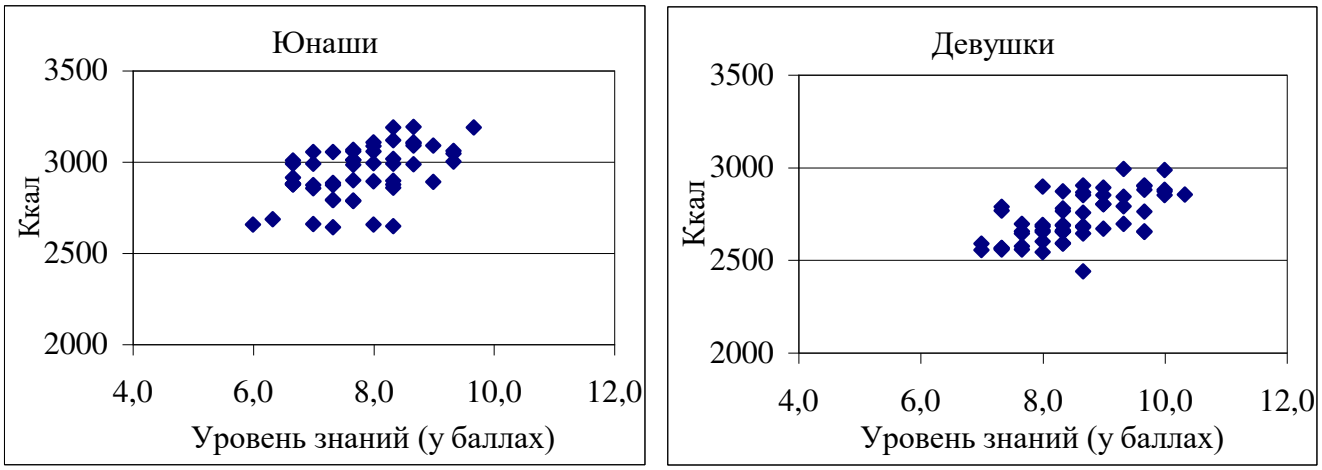


Рис. 2.2. **Корреляционное поле зависимости уровня знаний от двигательной активности.**

Полученные результаты как у юношей та и у девушек подтверждаются критерием значимости корреляции (по t–Стьюдента, где $t_{расчет.} > t_{критич.}$) при $\alpha < 0,01$.

ПРИМЕР 2.2.

Корреляционный анализ уровня знаний между темами (Т-1, Т-2, Т-3, Т-4) (приложение А, протокол 1). Результаты анализа позволяют говорить, о том, что у юношей в каждой экспериментальной группе существует сильная статистическая взаимосвязь (r=0,77–0,88) между Т-1 и Т-2 и слабая корреляционная связь (r=–0,21–0,40) между Т-1 и Т-3, Т-2 и Т-3 (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Коэффициенты корреляции между средними значениям уровня знаний юношей и девушек экспериментальных групп по основным темам

Группа / № теми	ЭГ – 1			ЭГ – 2			ЭГ – 3		
	Т-1	Т-2	Т-3	Т-1	Т-2	Т-3	Т-1	Т-2	Т-3
Юноши									
Т-2	**0,77**			**0,83**			**0,83**		
Т-3	0,40	0,35		–0,28	–0,29		–0,21	–0,32	
Т-4	0,15	0,20	**0,64**	0,28	0,27	0,34	0,19	0,07	0,40
Девушки									
Т-2	–0,01			0,36			**–0,51**		
Т-3	–0,12	–0,36		0,14	**0,54**		0,07	–0,27	
Т-4	**0,66**	–0,26	0,02	0,23	**0,68**	0,41	0,04	–0,29	**0,69**

У девушек между Т-1 и Т-4 ЭГ 1, между Т-2 и Т-3, Т-4 ЭГ 2, между Т-3 и Т-4 ЭГ 3 существует средняя статистическая взаимосвязь. При этом у девушек ЭГ 3 между Т-1 и Т-2 выявлена отрицательная средняя статистическая взаимосвязь (r=–0,51). Очень слабый коэффициент корреляции наблюдается между Т-1 и Т-4 у юношей первой и третей ЭГ, у в то время как у девушек первой и второй ЭГ.

ПРИМЕР 2.3.

Проведение корреляционного анализа по отдельным темам. Коэффициенты корреляции дают возможность оценить степень взаимосвязи между показателями. В нашем случае между теоретическим, методическим и практическим уровнем знаний по четырем темам, в учащихся ЭГ 1 (юношей – 28, девушек – 24), ЭГ 2 (юношей – 14, девушек – 20) та ЭГ 3 (юношей – 11, девушек – 14) (приложение А, протокол 1).

В результате проведенного анализа было установлено, что в большинстве случаях средняя и слабая статистическая корреляционная связь наблюдается между тремя уровнями знаний по каждой теме как у юношей, так и у девушек, за исключением двух случаев у юношей первой экспериментальной группы между теоретическим и методическим уровнем знаний по теме "Физическое здоровье, компоненты и критерии оценки" и "Особенности организации самостоятельных занятий физической культурой детей старшого школьного возраста" (рис. 2.2, 2.3).

Сильная взаимосвязь наблюдается между теоретическим и методическим уровнем знаний (r=0,72–0,70) в двух случаях у юношей ЭГ 1. Средняя статистическая взаимосвязь (r= 0,67–0,50) по четыре из четырех случаев у юношей ЭГ 2 и у девушек ЭГ 1 и ЭГ 2, по одному случаю у юношей ЭГ 1 и в девушек ЭГ 3. Между методическим и практическим уровнем знаний (r=0,67–0,50) в четырех и трех случаях у юношей ЭГ 1 и ЭГ 2 (соответственно), по одному случаю у юношей ЭГ 3 и в девушек ЭГ 1 и ЭГ 2. В одному случае у юношей второй ЭГ прослеживается такая же взаимосвязь между теоретическим и практическим уровнем знаний (r=0,65) при достоверных отличиях α<0,05; α<0,01.

Слабая статистическая взаимосвязь между теоретическим и методическим уровнем знаний (r=0,49 – 0,22) в одному и четырех случаях у юношей ЭГ 1 и ЭГ 3 (соответственно), в одному случае у девушек ЭГ 2. Между теоретическим и практическим уровнем знаний (r=0,45–0,21) такая корреляционная связь наблюдается в четырех случаях у юношей и девушек ЭГ 1 и ЭГ 2, у юношей ЭГ 3 у

двух случаях, у девушек ЭГ 3 – в одном. По одному случаю у юношей ЭГ 2 и ЭГ 3 и у девушек ЭГ 3, в трех – у девушек ЭГ 2 и ЭГ 3 между теоретическим и практическим уровнем знаний (при достоверных отличиях α<0,05; α <0,01).

а)

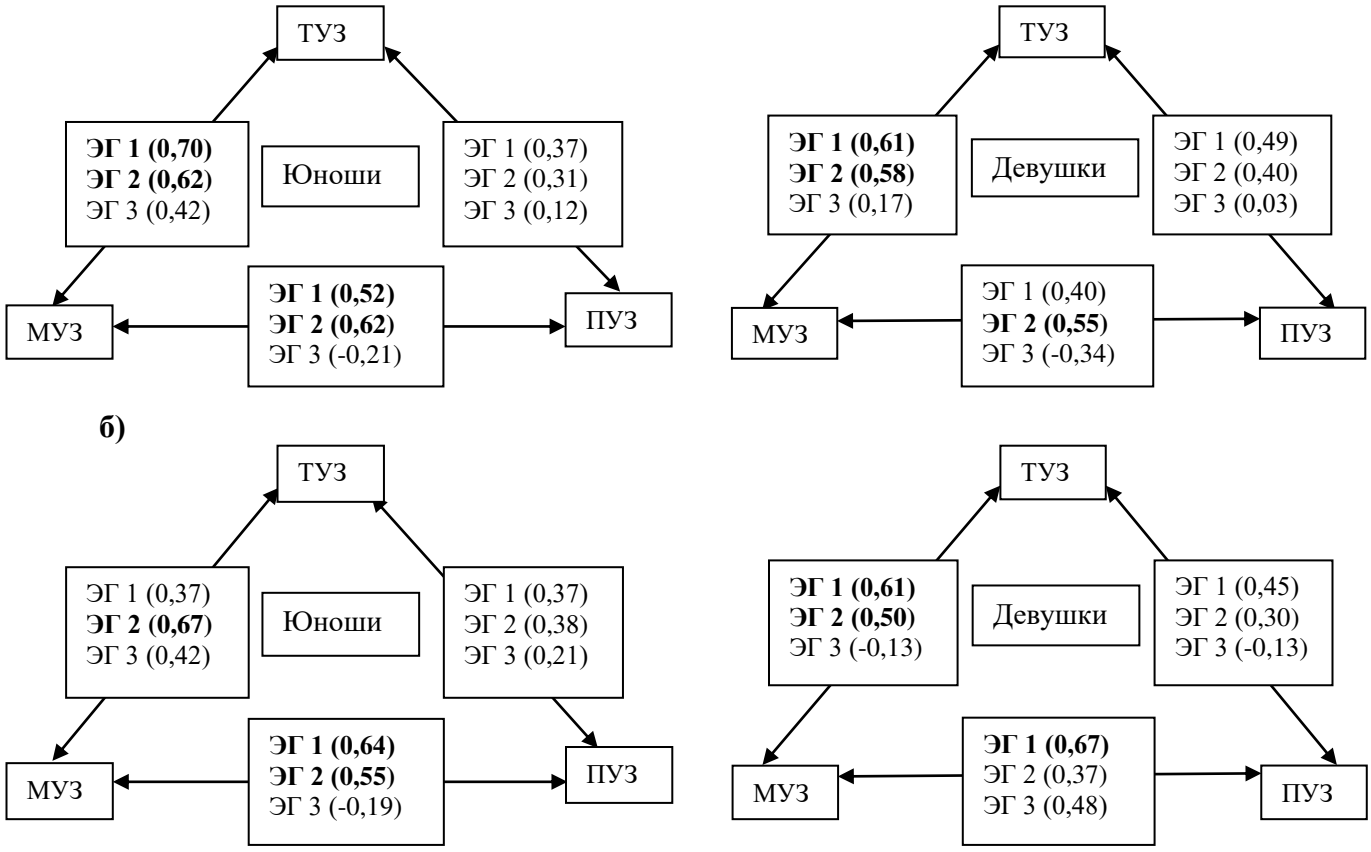


Рис. 2.2. **Коэффициенты корреляции между теоретическим (ТУЗ), методическим (МУЗ) и практическим (ПУЗ) уровнем знаний по теме 1 и 2.**

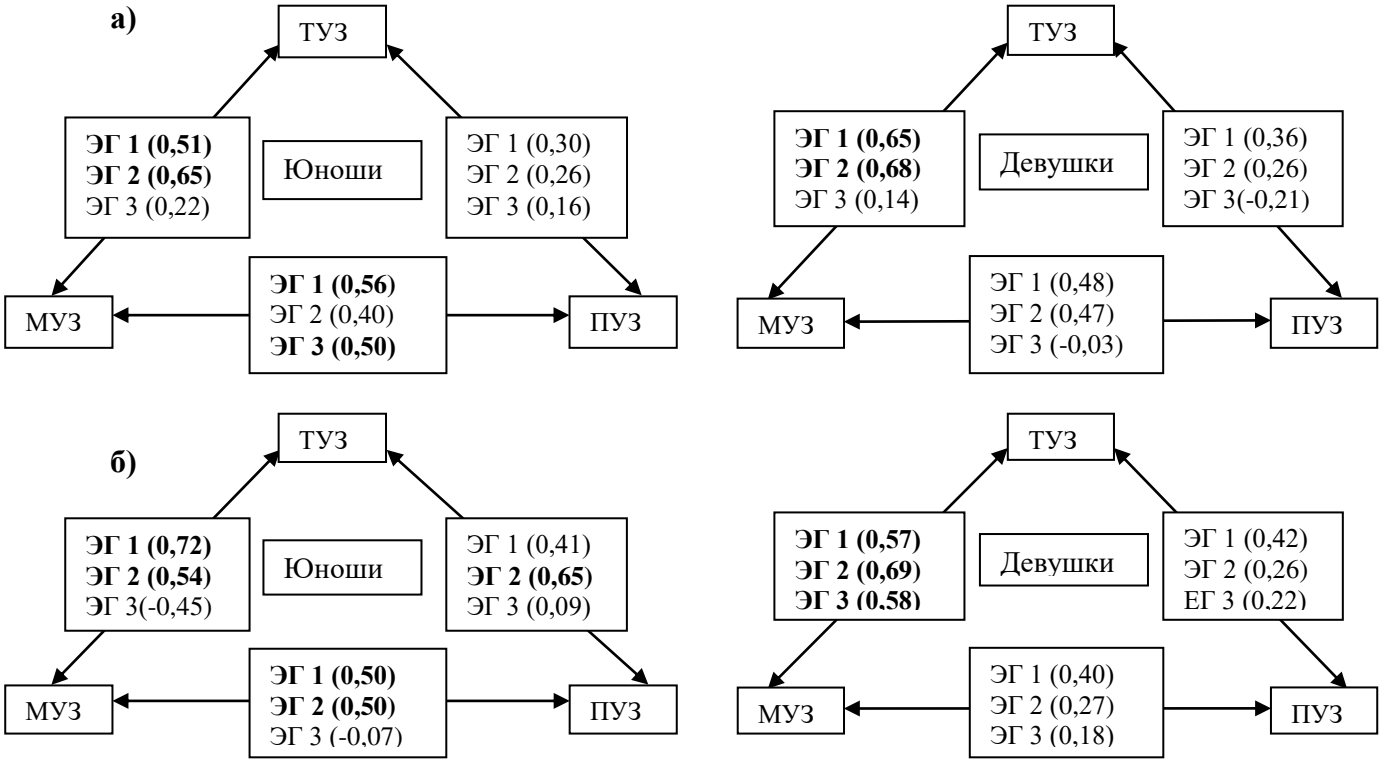


Рис. 2.3. **Коэффициенты корреляции между теоретическим (ТУЗ), методическим (МУЗ) и практическим (ПУЗ) уровнем знаний по теме 3 и 4.**

В третьей ЭГ у юношей и девушек выявилась очень слабая статистическая зависимость(r=0,19–0,09) в трех и пяти случаях (соответственно) с двенадцати возможных сравнениях. В трех случаях у девушек данной группы корреляция отсутствует.

Таким образом, исследование корреляционной связи между теоретическим, методическим и практическим уровнем знаний по темам показало, что: 1) проводным компонентом корреляции между уровнем знаний, и у юношей и у девушек есть методический уровень. Приоритет этого уровня обусловлен наибольшими ($t_{расчетное} > t_{критическое}$) коэффициентами корреляции (сильная r=0,99–0,7 и средняя r=0,69–0,5 статистическая взаимосвязь) в 16-ти случаях с теоретическим и в 9-ти – с практическим уровнем знаний с 24-х; 2) сильная и средняя статистическая корреляционная взаимосвязь между уровнем знаний в большинстве случаях наблюдается у юношей и девушек первой и второй ЕГ – в 15-ти и 11-ти (соответственно) с 24-х случаев.

ПРИМЕР 2.4.

Рассмотрим особенности корреляции между теоретическим, методическим и практическим уровнем знаний и показателями уровня двигательной активности (УДА) учащихся экспериментальных групп (ЭГ) в зависимости от методики планирования учебного материала, т.е. на внутригрупповом уровне (ЭГ 1 - планирование на основе факультативных занятий; ЭГ 2 – на основе межпредметных связей уроков физической культуры с другими предметами; ЭГ 3 – в системе уроков физической культуры).

Для выполнения корреляционного анализа использовались данные:

- *средний балл уровня знаний по вопросам двигательной активности (приложение А, протокол 1, тема 2);*
- *полученные баллы в результате опроса за теоретический, методический и практический уровень знаний по вопросам двигательной активности (приложение А, протокол 1, тема 2);*
- *уровень двигательной активности (ккал) (приложение А, протокол 2).*

В результате установлено, что в зависимости от организации и методики изложения данного материала коэффициенты корреляции значительно выше у ЭГ 1 и ЭГ 2 по сравнению с ЭГ 3.

На рисунке 2.4 (А) видно, что у юношей сильная статистическая связь (r=0,78) наблюдается между УДА и общим уровнем знаний у ЭГ 2. В данной группе средняя статистическая связь между УДА и теоретическим, методическим и практическим уровнем знаний (r=0,69; 0,67; 0,59 соответственно). ЭГ 1 имеет слабую корреляционную связь между УДА с теоретическим и методическим уровнем знаний (r=0,40; 0,39 соответственно) и среднюю – в случае с общим и практическим уровнем знаний (r=0,50). ЭГ 3 - низкий коэффициент корреляции между УДА и методическим уровнем знаний (r=0,29), очень низкий – с теоретическим и практическим уровнем знаний (r=0,16;–0,09 соответственно), отсутствие взаимосвязи – с общим уровнем знаний (r=0,01).

Анализ взаимосвязи показателей исследования (рис. 2.4. (Б)) у девушек показал, что общий уровень знаний у ЭГ 1 имеет высокий коэффициент корреляции (r=0,72), ЭГ 2 – средний (r=0,61), ЭГ 3 – низкий (r=0,35). В двух случаях существует

сильная корреляционная зависимость (между УДА и общим уровнем знаний УДА и МУЗ в ЭГ 1 – r=0,72; r=0,70 соответственно) и в одном случае отсутствует такая зависимость (между УДА и ТУЗ у ЭГ2 – r = 0,03). Соотношение ТУЗ с УДА в ЭГ 1 и ЭГ2 выявило слабую статистическую связь (r=0,49; 0,44 соответственно), такая связь наблюдается в случаях с МУЗ в ЭГ 3 и ЭГ 3 (r=0,38; 0,30). Обратим внимание на то, что в ЭГ 1 и ЭГ 2 между УДА и ПУЗ существует средняя связь, а в ЭГ 3 – слабая.

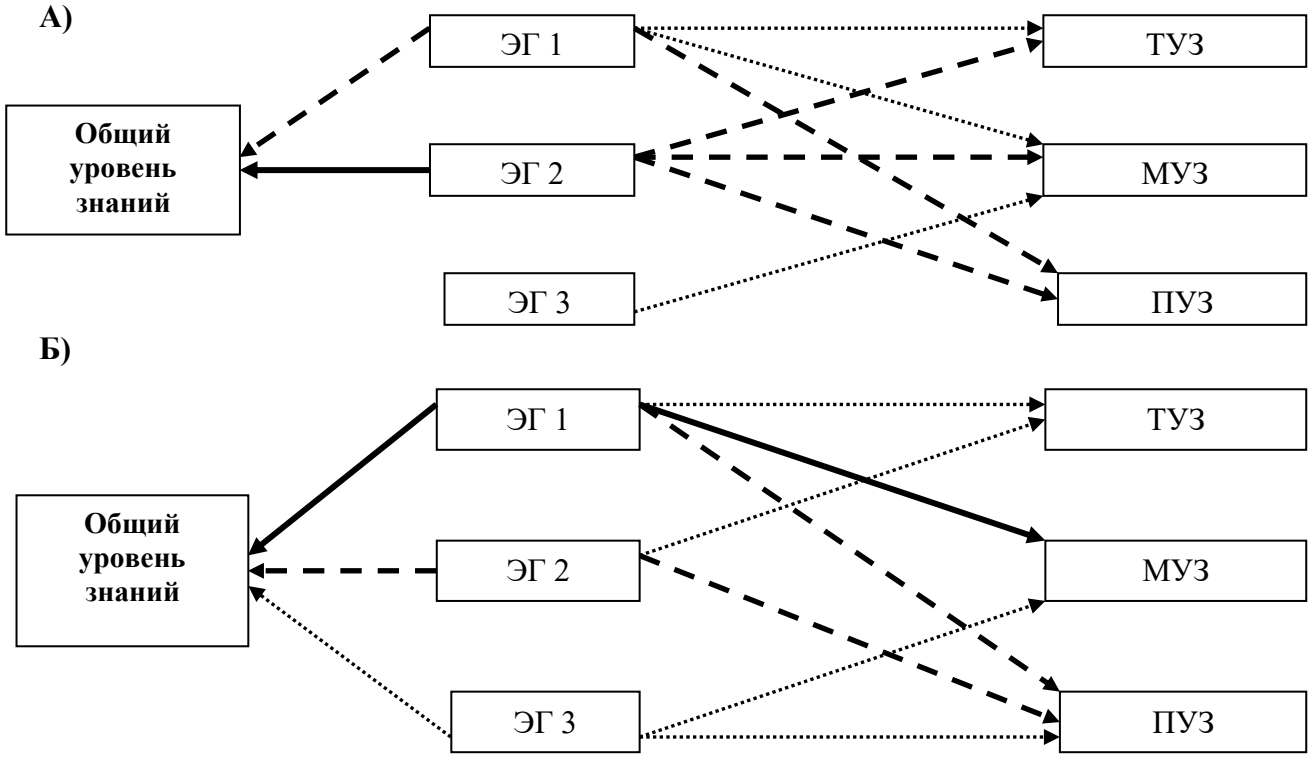


Рис. 2.4. **Статистическая взаимосвязь между уровнем двигательной активности и теоретическим (ТУЗ), методическим (МУЗ) и практическим (ПУЗ) уровнем знаний у юношей (А) и девушек (Б):**

→ – α < 0,001 (сильная статистическая взаимосвязь);

- - → – α< 0,01 (средняя статистическая взаимосвязь);

.....→ – α < 0,05 (слабая статистическая взаимосвязь)

Различают коэффициент парной корреляции r_{xy}, когда рассматривают связь двух переменных y и x, и коэффициент множественной корреляции $R_{yx_1x_2...x_m}$, когда рассматривают зависимость y от многих переменных – $x_1, x_2, ..., x_m$.

$$y = a_0 + a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) + ... + a_m f_m(x_m) \qquad (2.11)$$

Или в общем виде

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x_i) \qquad (2.12)$$

Коэффициент множественной корреляции всегда бывает положительным $0 \le R \le 1$ и определяется по формуле

$$R_{yx_1x_2...x_m} = \sqrt{1 - \frac{S_O^2}{\sigma_{\bar{y}}^2}}, \qquad (2.13)$$

При этом S_o^2 - остаточная дисперсия (невязки), вычисленная в отклонениях переменной *y*: от теоретической аппроксимирующей зависимости (2.11).

Вычисленный по формуле (2.13) коэффициент множественной корреляции называют также корреляционным отношением. Таким образом, оценивается теснота связи в случае парной нелинейной зависимости.

Для определения коэффициентов уравнения регрессии (2.11) в теории статистики обычно применяется метод наименьших квадратов. При малых выборках и больших ошибках измерений показателей *x* и *y* следует применять метод регуляризации Тихонова.

Метод наименьших квадратов позволяет найти такие коэффициенты уравнения регрессии a_i, которые обеспечивают минимальную сумму квадратов отклонений расчетных значений $\tilde{y}_i$ от фактических y_i

$$S_o = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min \qquad (2.14)$$

Коэффициенты регрессии для любого вида уравнения $y=f(a_0a_1a_2\ldots a_m,\ x_1x_2\ldots x_m)$ найти математически сложно. Поэтому практически метод наименьших квадратов применяется в основном для частного вида уравнений $\tilde{y} = a_0 + a_1 f(x_1) + a_2 f(x_{2)+\ldots+a_m f(x_m)}$. *f(x)* – показывает возможность различных функциональных преобразований над аргументом при условии, что коэффициенты регрессии *a* остаются линейными. Подставляя в формулу (2.14) вместо $\tilde{y}$ его выражение, получим для данного класса уравнений

$$S_o = \sum\left[y_{i-a_0-a_1 f(x_1)-a_2 f(x_2)-\ldots-a_m f(x_m)}\right]^2.$$

Поочередно находят и приравнивают нулю первые производные функции по параметрам $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$. При этих условиях функция (2.14) принимает минимальное значение. В результате дифференцирования получается система из $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными, решением которых находят искомые значения коэффициентов. Ниже приведена готовая система нормальных уравнений для линейной модели, которую нужно решать отдельно $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum y = na_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 + \ldots + a_m\sum x_m;\\
&\sum yx_1 = a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_2x_1 + \ldots + a_m\sum x_mx_1;\\
&\sum yx_2 = a_0\sum x_2 + a_1\sum x_1x_2 + a_2\sum x_2^2 + \ldots + a_m\sum x_mx_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum yx_m = a_0\sum x_m + a_1\sum x_1x_m + a_2\sum x_2x_m + \ldots + a_m\sum x_m^2.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.15)$$

Для парной зависимости вида $y=a_0+a_1x$ коэффициенты по уравнению наименьших квадратов можно определить по формулам:

$$\left.\begin{aligned}
&a_1 = \frac{n\sum xy - \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad \textit{или} \quad a_1 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\\
&a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \quad \textit{или} \quad a_0 = \frac{\sum x^2\sum y_i - \sum x\sum yx}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

Для полинома второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \qquad (2.17)$$

Коэффициенты находят решением системы уравнений (2.11) полагая $x_1=x$ и $x_2=x^2$, или по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} & a_0 = \bar{y} - A_1\bar{x} + A_2\bar{x}^2 - A_2 B; \\ & a_1 = A_1 - 2A_2\bar{x}; \quad a_2 = A_2; \\ & A = \frac{\sum(x_i-\bar{x})y_i}{\sum(x_i-\bar{x})^2}; \quad B = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}; \\ & A_2 = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2 y_i - nB\bar{y}}{\sum(x_i-\bar{x})^4 - nB^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

Исходные экспериментальные точки парной зависимости часто сильно разбросаны относительно кривой. Их целесообразно предварительно выровнять методом скользящей средней. Предположим, дан ряд значений y и x и каждому значению x_i соответствует всегда одно значение y_i. При выравнивании по трем последовательным точкам находят среднее:

$$\hat{y}_1 = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}; \quad \hat{y}_2 = \frac{y_2+y_3+y_4}{3} \text{ и т.д.}$$

В результате выравнивания получится новый ряд средних значений y: $\hat{y}_1 \to x_2, \hat{y}_2 \to x_3, ..., \hat{y}_{n-1} \to x_{n-2}$. Выравнивание можно производить по различному количеству точек (2, 3, 4, 5 и т.д.). Выравненный ряд можно повторно сгладить. После каждого выравнивания уменьшается разброс точек. Кривая, проведенная по скользящим средним, близка к кривой, полученной по методу наименьших квадратов (рис.2.2).

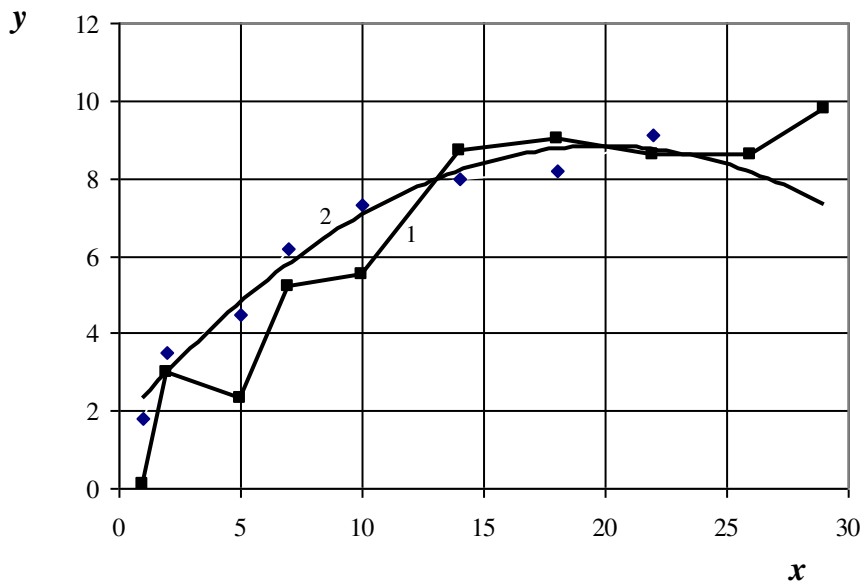


Рис. 2.2. **Выравнивание ряда по методу скользящей средней:**
1- исходные значения *y*; 2- выравненные значения *y*.

Для двух факторов, которые связаны уравнением $y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$, коэффициенты b_0 , b_1 и b_2 методом наименьших квадратов можно определить по следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\frac{\sum y}{n}\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1}-\frac{\sum x_1x_2}{\sum x_2}\right)+\frac{\sum yx_1}{\sum x_1}\left(\frac{\sum x_1x_2}{\sum x_2}-\frac{\sum x_1}{n}\right)+\frac{\sum yx_2}{\sum x_2}\left(\frac{\sum x_1}{n}-\frac{\sum x_1x_2}{\sum x_1}\right)}{\left(\frac{\sum x_2}{n}-\frac{\sum x_2x_1}{\sum x_1}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1}-\frac{\sum x_1x_2}{\sum x_2}\right)-\left(\frac{\sum x_2^2}{\sum x_2}-\frac{\sum x_2x_1}{\sum x_1}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1}-\frac{\sum x_1}{n}\right)} \\
a_2 &= \frac{\frac{\sum y}{n}\left(\frac{\sum x_2^2}{\sum x_2}-\frac{\sum x_2x_1}{\sum x1}\right)+\frac{\sum yx_1}{\sum x_1}\left(\frac{\sum x_2}{n}-\frac{\sum x_2^2}{\sum x_2}\right)+\frac{\sum yx1}{\sum x1}\left(\frac{\sum x_2x_1}{\sum x_1}-\frac{\sum x_2}{n}\right)}{\left(\frac{\sum x_2}{n}-\frac{\sum x_2x_1}{\sum x_1}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1}-\frac{\sum x_1x_2}{\sum x_2}\right)-\left(\frac{\sum x_2^2}{\sum x_2}-\frac{\sum x_2x_1}{\sum x_1}\right)\left(\frac{\sum x_1^2}{\sum x_1}-\frac{\sum x_1}{n}\right)} \\
a_0 &= \frac{1}{n}\left(\sum y - a_1\sum x_1 - a_2\sum x_2\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

При трех и более факторах коэффициенты определяют, решая систему уравнений (2.15).

Построение регрессионных зависимостей обычно базируется на предварительных гипотезах и предположениях. Это требует обязательной проверки физической корректности моделей. Проверка гипотезы об адекватности модели, как и другие статистические процедуры, производятся обычно в предположении, что полученные МНК-оценки параметров модели оптимальны, т.е. МНК применен корректно, с учетом необходимого вида функций и характера взаимосвязей между регистрируемыми величинами.

При проведении регрессионного анализа обычно предполагается, что ошибка в измерении величины y независимы, имеют нулевые средние, одинаковую (постоянную) дисперсию σ^2 и подчиняются нормальному распределению. Последнее допущение особенно важно для использования нижеописанного F-критерия.

Самой полезной информацией при оценке адекватности модели являются остатки $l_i = y_i - \hat{y}_i$, показывающие, насколько наблюдаемые значения y_i отличаются от величины $\hat{y}_i$, вычисленных по уравнению (2.11). Если подбирается модель правильная, остатки должны проявлять тенденцию к подтверждению исходных предположений, или по меньшей мере, не должны противоречить им. Одной из характеристик, определяющих качество исследуемой модели, является остаточная дисперсия

$$S_o^2 = \frac{1}{n-m-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 ,$$

где: n – количество наблюдений; m – число независимых аргументов в уравнении регрессии.

Величина S_o определяет среднюю ширину полосы разброса, который остается неучтенным при замене уравнения $\hat{y} = \bar{y}$ на уравнение вида (2.11). Для

сопоставления общей S_y^2 и остаточной S_o^2 служит величина $F = \frac{S_y^2}{S_o^2}$, показывающая, во сколько раз общая дисперсия зависимой переменной y больше остаточной дисперсии.

Если F_1<1.5, результаты, представленные по уравнению регрессии, лишь незначительно точнее, чем предсказанные просто среднего значения $\bar{y}$ для любых значений аргументов x_i из области их изменения. Чем больше величина F_y, тем вычисленные по уравнению регрессии значения y_i ближе к фактическим наблюдаемым. Вместо остаточной дисперсии S_o^2 удобнее рассматривать среднее квадратичное отклонение, или, как его иногда называют, стандартную ошибку оценки $S_o = \sqrt{S_o^2}$. Стандартная ошибка оценки S_o измеряется в тех же единицах, что и величина y. Большая стандартная ошибка оценки S_o указывает на то, что либо неправильно выбрана форма уравнения регрессии, либо в уравнение не включены другие важные факторы, либо ошибки измерения величин y и x очень велики. Последнее обстоятельство является одной из наиболее частых причин неудачного применения регрессионного анализа.

Для проверки этой гипотезы в каждом конкретном случае необходимо вычислить величину критерия Фишера $F_j = \frac{S_j^2}{S_{jon.}^2}$, где S_j^2 – выборочная дисперсия для j-переменной, а $S_{jon.}^2$- дисперсия ошибки метода измерения, которая может быть получена по паспортным данным или соответствующим инструкциям. Полученное значение F сравнивается с табличным значением F – распределения при выбранном уровне значимости σ и степенях свободы $f_1=n$-1 для числителя и $f_2=\infty$ для знаменателя. Очень полезно выполнить анализ графика в координатах $y_{эксп.} \rightarrow y_{теор.}$ или, в двумерном случае, карты невязок. В случае корректной модели график четко располагается вдоль биссектрисы координатного угла, ширина полосы разброса является одной из визуальных характеристик точности модели. Явные выбросы следует тщательно проверить и в случае необходимости исключить как недостоверные. Очень важной характеристикой при оценке уравнения регрессии является средняя ошибка аппроксимации $\varepsilon = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{y}_i - y_i}{y_i} \cdot 100\%$ которая оценивает среднее отклонение вычисленных по уравнению регрессии значений y относительно самих экспериментальных данных в процентах.

Корреляция и регрессия (сводная таблица формул).

1. Коэффициент корреляции $$r_n = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i - \bar{y})^2}}.$$

2. Значимость коэффициента корреляции $$t = \frac{r_n\sqrt{n-1}}{\sqrt{1 - r_n^2}}$$

t - t – распределение Стьюдента с вероятностью P_n n-1 ст. свободы

3. Прямые регрессии $$y - \bar{y} = r_n \frac{S_2}{S_1}(x - \bar{x}),$$

$$x - \bar{x} = r_n \frac{S_2}{S_1}(y - \bar{y}).$$

4. Уравнение множественной регрессии $$\hat{y} = A_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varphi(x_i)$$

a_i определяются из уравнения $$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \to \min$$

a_i вычисляются по формуле $$A = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

(Y-вектор значений зависимой переменной, X-матрица независимых переменных или $Y(x_i)$)

5. Вектор остатков $$E = Y - \hat{Y}$$

6. Оценки адекватности модели: $$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$$

ε - остаточная дисперсия

ε_1 – относительная погрешность $$\varepsilon_1 = \frac{1}{n}\sum \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \cdot 100\%$$

R – корреляционное отношение $$R = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{S_y^2}}$$

7. Коэффициент множественной корреляции : $Д$ – определитель матрицы корреляций $$R_к = (1 - Д)/Д_{кк}$$

8. Значимость коэффициента корреляции $$F = \frac{R_к^2 / m}{(1 - R_к^2)/(n - m - 2)}$$

F – (F- распределение Фишера с m и (n-m-2) степенями свободы).

2.2. Методика факторного анализа

В факторном анализе предполагается, что наблюдаемые переменные являются линейной комбинацией некоторых скрытых факторов. При этом некоторые факторы являются общими для двух и более переменных.

При решении задач факторного анализа необходимо выполнить следующие четыре шага:

- Вычислить соответствующую корреляционную матрицу.
- Найти собственные числа и собственные векторы матрицы.
- Найти факторные нагрузки для каждой переменной.

- Выполнить вращение матрицы нагрузок с целью получения наиболее простого решения.

1. Корреляционная матрица для m переменных имеет вид:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} r_{11}\ r_{12} \dots r_{1m} \\ r_{21}\ r_{22} \dots r_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{m1}\ r_{m2} \dots r_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & R_{ji} \\ R_{ij} & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Для определения собственных чисел и собственных векторов корреляционной матрицы ПЭВМ. Для их вычисления используется уравнение [14]

$$RV = \lambda V, \tag{2.20}$$

где R - корреляционная матрица, V - искомый вектор, а λ - собственное число. Решение базируется на более простой форме в виде:

$$|R - \lambda I| = 0, \tag{2.21}$$

т.е. $\det(R - \lambda I) = 0$. Так, например, для квадратной матрицы имеем уравнение:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & r_{12} \\ r_{12} & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0, \tag{2.22}$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получаем:

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - r_{12}^2 = 0, \tag{2.23}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 - r_{12}^2) = 0 \tag{2.24}$$

Собственные числа теперь могут быть получены из решения данного уравнения

$$\lambda_1 = 1 + r_{12}, \tag{2.25}$$

$$\lambda_2 = 1 - r_{12} \tag{2.26}$$

Если между переменными существует функциональная зависимость, то λ_1=2, а λ_2=0. Если нет, то λ_1=λ_2=1.

При этом сумма собственных чисел равна числу переменных $\lambda_1 + \lambda_2 = (1 + r_{12}) + (1 - r_{12}) = 2$, а произведение равно детерминанту корреляционной матрицы. При этом первое собственное число представляет величину дисперсии, соответствующей первому фактору, а второе собственное число – величину дисперсии, соответствующей второму фактору и т.д. Разделив собственное число на m – (число переменных), получим долю дисперсии соответствующей данному фактору. При такой схеме вычислений, коэффициенты нагрузок для выделенных факторов, получаются делением коэффициентов собственных векторов на квадратный корень соответствующих собственных чисел.

Количество выделяемых факторов.

Существует несколько часто употребляемых критериев определения числа факторов. Некоторые из них являются альтернативными, а часть можно использовать одновременно, чтобы один дополнял другой. В работе [14] подробно изложен ряд критериев, которые базируются на применении методов максимального правдоподобия и наименьших квадратов, различных правил в терминах собственных чисел, критериях отсеивания, интерпретируемости и инвариантности. При определении числа факторов наиболее часто применяют правило, которое

позволяет оставлять факторы с собственными числами, большими 1 для нередуцированной корреляционной матрицы. Этот простой критерий хорошо себя зарекомендовал, так как обычно дает результаты, совпадающими с теми, что ожидает получить исследователь. По отношению к генеральной совокупности рассматриваемый критерий дает нижнюю оценку числа общих факторов. Ниже представлен тестовый пример, построенный на модельных искусственных данных из выборки по трем показателям *x, y* и *z* объема *n*=150. Остальные восемь переменных являются их линейной комбинацией.

Тестовый пример факторного анализа.

Аналитические комбинации переменных и матрица факторных нагрузок представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Коэффициенты факторных нагрузок

№ п.п.	Переменная	F_1	F_2	F_3
1	x	0,043	0,999	-0,024
2	y	0,992	0,026	-0,124
3	z	-0,179	-0,034	0,983
4	x^2+7	0,042	0,999	-0,025
5	$5x$	0,043	0,999	-0,024
6	$Lnx+5x$	0,043	0,999	-0,024
7	y^3+8	0,992	0,029	-0,117
8	$5lny+3$	0,992	0,025	-0,127
9	$y+5lny$	0,992	0,026	-0,124
10	e^Z	-0,179	-0,030	0,983
11	$4x+5y$	0,986	0,108	-0,125

Для этого конкретного случая собственные значения корреляционной матрицы имеют следующие количественные оценки с точностью до 4-го знака после запятой:

λ_i = (3,8748; 5,4016; 1,7213; 0,0003; 0; 0; 0; 0,0006; 0,0000; 0,0015; 0,0000)

Выделим собственные значения > 1:

λ_1 = 5,4016; λ_2 = 3,8748; λ_3 = 1,7213;

Накопленные отношения собственных значений λ_i/m:

0,4910; 0,8433; 0,9997

Судя по величине накопленных отношений собственных значений, уже при выделении третьего фактора охвачено более 99% дисперсий исходных переменных. То есть выделились тривиальные исходные переменные *x, y* и *z,* которые соответствуют наибольшим факторным нагрузкам для переменной *x* – 2-ой фактор; для *y* – 1-й фактор; для переменной *z* – 3-й фактор. Остальные переменные являются их линейной комбинацией.

Второй часто применяемый подход определения числа факторов базируется на оценке доли общей дисперсии (она для нормализованных переменных всегда равна числу переменных), воспроизводимой каждым фактором. При этом оба рассмотренные метода предполагают упорядочение факторов по отношению к воспроизводимой доли общей дисперсии [15]. При этом доля воспроизводимой

дисперсии равна отношению собственного числа к сумме всех собственных чисел. В сочетании с аналитическими методами часто на практике применяется графический критерий отсеивания. При этом на график наносятся собственные числа в порядке их убывания (рис. 2.3).

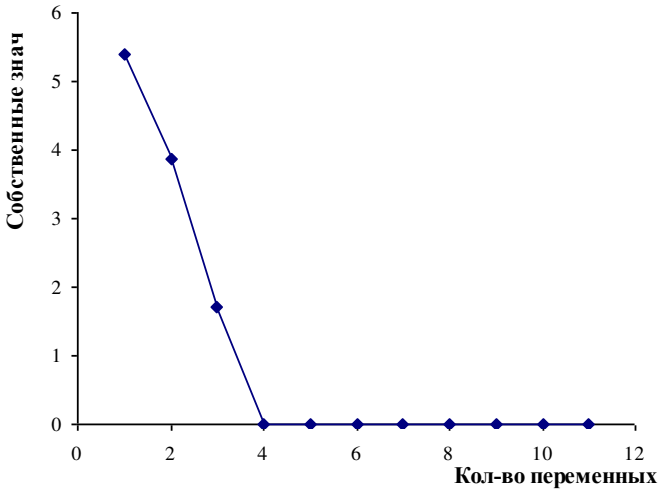


Рис. 2.3. **Факторный анализ (тестовый пример).**

Выделение заканчивается на том факторе, после которого исследуемая зависимость близка к почти горизонтальной прямой линии. Как видно из рисунка, соответствующего тестовому примеру, в соответствии с этим критерием выделяется 3 фактора. Для получения более надежных результатов следует применять несколько критериев одновременно и принимать только те результаты, которые подходят ко всем критериям. Окончательное решение должно базироваться на их применяемости с точки зрения научных представлений в данной области.

Рассмотрим пример вычисления факторного анализа для выявления совокупностей многомерного статистического анализа взаимосвязей между значениями переменных, а именно между уровнем знаний и показателями физического здоровья при распределении трех и четырех факторов.

ПРИМЕР 2.5.

Для выполнения факторного анализа использовались следующие данные:

- *средний балл уровня знаний о физическом здоровье юношей и девушек экспериментальных классов (приложение А, протокол 1);*
- *уровень двигательной активности (ккал) юношей и девушек (приложение А, протокол 2);*
- *показатели уровня функциональных возможностей юношей и девушек экспериментальных классов (приложение А, протокол 3);*
- *показатели уровня физической подготовленности юношей и девушек экспериментальных классов (приложение А, протокол 4).*

В табл. 2.3 представлены результаты факторного анализа двигательной активности, функциональных показателей, а также показателей физической подготовленности учащихся 10-х, 11-х классов. Объем выборки составляет n=113, исходных показателей – 12. Корреляционная матрица имеет вид:

$$R_{ij} = \begin{bmatrix} ...1.000...0,422..-0,237..-0,029..0,294..-0,85..-0,493..-0,510..-0,224..-0,377..-0,467..0,524 \\ ...0,422...1,000..-0,099..0,220...0,833..-0,208..-0,560..-0,637..-0,253..-0,340..-0,679..0,575 \\ -0,237..-0,099...1,000...0,463..-0,092...0,010....0,198.....0,155.....0,226.....0,78.....0,185...-0,235 \\ -0,029....0,220...0,463....1,000...0,036..-0,042....0,080...-0,049..-0,051..-0,139..-0,047..0,005 \\ ..0,294....0,833..-0,092..0,036...1,000...-0,125..-0,459..-0,534..-0,194....0,125...-0,574..0,450 \\ -0,085..-0,208..0,010..-0,042..-0,125...1,000...0,220.....0,276.....0,202....0,109....0,157...-0,175 \\ -0,493..-0,560..0,198....0,080..-0,459....0,220..1,000....0,738....0,179....0,156....0,723...-0,748 \\ -0,510..-0,637..0,155..-0,049..-0,534...0,276...0,738...1,000....0,158....0,242....0,779...-0,753 \\ -0,224..-0,253..0,226..-0,051..-0,194....0,202...0,179....0,158...1,000....0,405....0,060...-0,126 \\ -0,377..-0,340..0,078..-0,139..-0,125...0,109...0,156....0,242...0,405....1,000....0,132....-0,145 \\ -0,467....-0,679..0,185..-0,047..-0,574..0,157...0,723...0,779...0,060....0,132....1,000...-0,819 \\ ...0,524....0,575..-0,235...0,005...0,405..-0,175..-0,748..-0,753..-0,126..-0,145..-0,819..1,000 \end{bmatrix}$$

.

В результате факторного анализа было получено следующее значения собственных чисел: λ_i=(0,8760; 4,9195; 0,4578; 1,5476;0,1;0,5862; 0,4813; 0,2509; 0,9701; 1,4246; 0,2309; 0,1552).

Собственные числа >1: 4,9195; 1,5476; 1,4246.

Под факторной нагрузкой, можно понимать корреляционные коэффициенты между показателями и факторами.

Накопленные отношения этих трех собственных значений охватывают лишь 66% общей дисперсии, что следует о недостаточной состоятельности применения λ-критерия. Значение факторных нагрузок для случая 4-х факторов, охватывающих 75% общей дисперсии представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Собственные значения корреляционной матрицы

Факторы	Собственные значения	Накопительные отношения собственных значений	Доля общей дисперсии в %
1	4,91946	0, 40996	40,996
2	0,53892	0, 53892	53,892
3	0,65764	0, 65764	65,764
4	0,9701	0,74858	74,858

Первый фактор можно интерпретировать как «зависимость физической подготовленности от уровня знаний». С высокими факторными нагрузками вошли показатели уровня знаний, двигательной активности и физической подготовленности (характеризуется 7 переменными) от 0,715 до 0,918 (табл. 2.4.). Он объясняет 41% суммарной дисперсии.

Первый фактор можно интерпретировать как «зависимость физической подготовленности от уровня знаний». С высокими факторными нагрузками вошли показатели уровня знаний, двигательной активности и физической подготовленности (характеризуется 7 переменными) от 0,715 до 0,918 (табл. 2.4.). Он объясняет 41% суммарной дисперсии.

Ко второму фактору вошли переменные, которые характеризуют функциональные возможности сердечно-сосудистой и дыхательной системы. Второй фактор объясняет 13% общей дисперсии, в который вошли две

переменные, характеризующие уровень развития дыхательной системы (ЖЕЛ) и общей работоспособности (проба Руфье), с высокими факторными нагрузками (0,7763; 0,8322).

Таблица 2.4

Факторные нагрузки корреляционной матрицы R_{ij} *(для четырех факторов)*.

№	Переменная	F_1	F_2	F_3	F_4
1	Уровень знаний	**0,7650**	-0,1946	-0,4249	0,1652
2	Уровень двигательной активность	**0,7980**	0,2142	-0,3009	-0,0487
3	ЖЕЛ	-0,1531	**0,8113**	0,2193	-0,0275
4	Проба Руфье	0,0658	**0,8521**	-0,1626	0,0067
5	Проба Робинсона	**0,7154**	0,1215	-0,1294	-0,0215
6	Силовой индекс	-0,1575	-0,0240	0,1035	**0,9454**
7	Бег на 30 м	**-0,8244**	0,1825	0,0525	0,1387
8	Бег на 2000 м	**-0,8660**	0,0364	0,1072	0,1585
9	Наклон вперед	-0,0523	0,1108	**0,7763**	0,2593
10	Подтягивание на перекладине	-0,1399	-0,0944	**0,8322**	-0,0662
11	Челночный бег 4х10 м	**-0,9187**	0,0414	-0,0250	0,0185
12	Прыжок в длину с места	**0,8697**	-0,1450	-0,0263	-0,0486
Вклад фактора в общую дисперсию выборки		**41%**	**13%**	**12%**	**11%**

Примечание: Граничное значение факторной нагрузки рассматривается на уровне выше ≥ 0,7

Содержание третьего фактора можно трактовать как силовые способности, связанные с развитием гибкости, вклад этого фактора в суммарную дисперсию составляет 12%.

Значения факторных нагрузок четвертого фактора интерпретируются как «силовые способности», вклад фактора составил 11% суммарной дисперсии (характеризуется 1 переменной).

В результате факторного анализа было установлено, что остальные показатели (с низкими факторными нагрузками) не имеют значительного влияния на состояние функциональных возможностей и физическую подготовленность юношей и девушек старшего школьного возраста.

ПРИМЕР 2.6.

Рассмотрим пример сравнительного факторного анализа контрольной и экспериментальной групп, используя 6 переменных.

Для выполнения сравнительного факторного анализа использовались следующие данные:

- *средний балл уровня знаний о физическом здоровье юношей и девушек экспериментальных классов (приложение А, протокол 1);*
- *уровень двигательной активности (ккал) юношей и девушек (приложение А, протокол 2);*
- *показатели уровня функциональных возможностей юношей и девушек экспериментальных классов (приложение А, протокол 3).*

В результате факторного анализа было получено следующее значения собственные значения контрольной и экспериментальной групп, которые представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5

Собственные значения корреляционной матрицы контрольной и экспериментальной групп

Факторы	Собственные значения	Накопительные отношения собственных значений	Доля общей дисперсии в %
Контрольная группа			
1	1,8225	0,3037	30,37
2	1,5315	0,5590	55,90
3	1,1891	0,7571	75,71
Экспериментальная группа			
1	2,2405	0,3734	37,34
2	1,3248	0,5942	59,42
3	1,1153	0,7801	78,01

Накопленные отношения трех собственных значений в контрольной группе охватывают 76% общей дисперсии, а в экспериментальной 78%, что следует о достаточном значении факторных нагрузок для данных 3-х факторов (табл. 2.5).

Таблица 2.6

Факторные нагрузки корреляционной матрицы R_{ij} контрольной и экспериментальной групп *(для трех факторов)*

№	Переменная	F_1	F_2	F_3
Контрольная группа				
1	Уровень знаний	-0,1002	0,2869	**-0,7096**
2	Уровень двигательной активность	**0,9204**	-0,2599	0,1162
3	ЖЕЛ	0,0173	-0,1817	**0,8610**
4	Проба Руфье	0,1228	**0,6718**	-0,2637
5	Проба Робинсона	**0,9061**	0,3517	-0,0275
6	Силовой индекс	0,1726	**0,8369**	0,1810
Вклад фактора в общую дисперсию выборки		**30%**	**26%**	**20%**
Экспериментальная группа				
1	Уровень знаний	**-0,7279**	-0,2762	0,0104
2	Уровень двигательной активность	**0,8803**	-0,1132	-0,2627
3	ЖЕЛ	-0,3472	**0,5975**	0,4487
4	Проба Руфье	0,1258	**0,8737**	-0,2449
5	Проба Робинсона	**0,8606**	-01908	0,2306
6	Силовой индекс	0,0511	-0,1220	**0,9231**
Вклад фактора в общую дисперсию выборки		**37%**	**22%**	**19%**

Примечание: Граничное значение факторной нагрузки рассматривается на уровне выше ≥ 0,5

Рассматривая факторные нагрузки контрольной и экспериментальной групп, можно сказать, что более логическое распределение факторных нагрузок выявлено в экспериментальной. Поскольку в экспериментальной группе в первый фактор вошло три переменные, которые можно интерпретировать как «уровень знаний, двигательной активности и функциональные возможности сердечно–сосудистой системы», при этом в контрольной группе – две переменных «уровень двигательной активности и функциональные возможности сердечно–сосудистой

системы». Этот фактор в общей дисперсии выборки на 7% выше в экспериментальной, нежели в контрольной группе и составил 37% и 30% суммарной дисперсии (соответственно).

Ко второму фактору, как в контрольной группе, так и в экспериментальной, вошло по две переменных. В контрольной группе фактор можно трактовать так «силовые способности и физическую работоспособность», вклад фактора составил 26% общей дисперсии. В экспериментальной группе, как «функциональные возможности сердечно–сосудистой и дыхательной системы», поскольку вошли показатели физической работоспособности за пробой Руфье и дыхательной системы – ЖЕЛ с высокими и средними нагрузками (0,8737 и 0,5975) и составил 22% суммарной дисперсии.

Содержание третьего фактора в экспериментальной группе можно трактовать как «силовые возможности», так как в него вошла одна переменная с высокими нагрузками (0,9231) и 19% суммарной дисперсии. Значение факторных нагрузок контрольной группы объединил две переменных: уровень знаний и функциональные возможности дыхательной системы (-0,7096 и 0,8610), вклад этого фактора объединяет 20% общей дисперсии.

В результате сравнительного факторного анализа контрольной и экспериментальной групп можно сделать вывод, что распределение факторных нагрузок более хаотичное в контрольной групп, а в экспериментальной более логическое.

Литература

1. Основы математической статистики: Учебное пособие для институтов физической культуры / Под ред. В.С.Иванова.–М.: Физкультура и спорт. – 1990. – 176 с.
2. Начильская С.В. Основы спортивной статистики / – К.: Высшая школа, 1987. – 189 с.
3. Начинская С.В. Спортивная метрология / – М.: Академия, 2005. – 238 с.
4. Кулаш Б.В. Основы профессиональной диагностики. – Л.: 1984. – 216 с.
5. Закс Л. Статическое оценивание / – М., 1976. – 226 с.
6. Эренберг А. Анализ и интерпретация статистических данных // Пер. с английского Б.И. Клименко / – М.: Финансы и статистика, 1981. – 406 с.
7. Методы анализа данных // Пер. с франц. С.А. Айвазяна / – М.: Финансы и статистика, 1985.
8. Турчин В.М. Математична статистика в прикладах та задачах: Навч. Посібник. – К.: НМКВО, 1993. – 144 с.
9. Большев А.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики / – М.: Наука, 1983. – 416 с.
10. Ромакін В.В. Комп’ютерний аналіз даних. Навчальний посібник. – Миколаїв: Видавництво МАГУ ім. Петра Могили, 2006. – 144 с.
11. Наследов А.Д. Компьютерный анализ даннях в психологи и социальных наук . – сПб.: Питер, 2005. – 416 с.
12. Белоусова Л.И. и др. Средства и методы обработки разнотипной информации. – К., 1997. – 178 с.
13. Белоусова Л.И. и др. Статистична обработка даних з використанням табличного процесора EXCEL. – Харків: Консул, 2002. – 35 с.
14. Иберла К.. Факторный анализ. – М.: Статистика, 1980.
15. Ким Дж.О., Мьюллер Ч.У., Клекка У.Р и др. / Под редакцией И.С. Енюкова. –М.: Финансы и статистика, 1989. – 215 с.
16. Годик М.А. Спортивная метрология. Учебник для институтов физической культуры. – М.: Физкультура и спорт, 1988. – 192 с.

Приложение А

ОСНОВНЫЕ ПРОТОКОЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Протокол 1. Оценки за теоретические знания (ТЗ), методические знания (МЗ) и практические знания (ПЗ) по темам: «Физическое здоровье, компоненты и критерии оценки» (тема 1); «Основные факторы, которые влияют на уровень физического здоровья» (тема 2); «Основы планирования физической нагрузки в процессе занятий физическими упражнениями юношей и девушек 15-18 лет» (тема 3); «Особенности организации самостоятельных занятий физической культурой детей старшего школьного возраста» (тема 4).

№	ТЕМА 1			ТЕМА 2			ТЕМА 3			ТЕМА 4		
	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ
10-А экспериментальная (девушки)												
1	9	9	10	8	7	9	10	11	11	8	9	10
2	8	9	8	7	7	8	10	10	11	7	8	10
3	10	10	10	8	7	8	11	10	10	9	9	10
4	10	10	10	9	8	10	9	9	11	8	9	10
5	11	10	11	9	8	10	8	10	10	8	9	11
6	10	9	11	8	8	9	10	11	10	9	10	11
7	10	9	10	7	9	9	9	10	11	8	9	10
8	10	9	10	8	8	9	9	9	9	8	10	11
9	9	10	10	8	8	9	8	10	11	9	10	11
10	9	9	11	7	6	9	9	10	10	8	9	10
11	10	10	10	6	6	9	8	9	9	8	10	11
12	9	8	9	7	7	9	9	10	10	6	9	9
11 -А экспериментальная (девушки)												
1	10	10	9	10	10	10	8	9	10	7	9	10
2	11	9	9	6	7	9	10	11	11	8	8	10
3	10	9	10	8	8	9	10	10	11	7	8	11
4	9	10	10	9	10	10	8	9	10	7	7	9
5	10	10	11	8	8	9	7	9	10	8	10	9
6	9	10	9	9	8	7	9	10	11	7	8	10
7	9	8	9	8	8	9	8	9	10	8	7	10
8	9	8	9	8	9	10	9	10	11	8	9	9
9	7	7	9	9	9	10	8	9	10	6	7	10
10	10	9	10	8	7	8	9	10	10	8	8	10
11	11	11	10	9	8	9	8	10	10	8	9	11
12	9	9	9	7	9	10	9	10	11	7	7	9
10-В экспериментальная (девушки)												
1	8	8	9	7	7	8	8	7	6	8	8	9
2	7	7	8	8	8	9	8	7	8	7	8	10
3	8	7	9	7	8	9	7	8	9	7	10	9
4	7	8	7	8	10	10	9	7	6	5	6	8
5	8	9	7	7	10	11	10	8	5	8	7	10
6	9	10	8	5	9	8	8	9	9	8	5	9
7	9	8	10	8	10	9	8	8	6	7	8	8
8	10	8	8	7	9	8	7	8	7	5	6	10
9	8	10	7	5	9	9	7	9	8	9	8	8
10	9	9	9	8	5	8	9	7	9	8	10	9
11	10	8	10	7	8	8	10	9	6	9	9	11
12	8	8	8	8	10	8	9	6	7	10	8	9
13	7	9	9	7	9	9	9	8	10	9	10	9
14	5	8	10	9	8	7	10	9	8	11	11	10

№	ТЕМА 1			ТЕМА 2			ТЕМА 3			ТЕМА 4		
	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ
11 -А экспериментальная (девушки)												
1	9	9	9	7	8	10	8	8	9	7	8	10
2	8	10	10	8	8	10	7	9	10	8	8	11
3	7	8	9	8	8	10	8	9	10	8	8	11
4	8	7	8	7	10	9	9	8	10	9	10	10
5	8	10	9	9	10	10	10	9	8	10	10	9
6	9	11	10	9	9	9	9	10	8	8	10	10
7	10	10	11	10	10	10	9	10	8	9	10	11
8	8	9	10	9	10	10	10	10	9	10	11	11
9	8	8	10	8	10	11	9	10	10	7	8	10
10	9	8	10	7	9	10	8	11	11	7	9	9
11	9	10	11	7	8	9	7	8	10	8	8	10
12	7	8	10	8	8	8	7	7	9	9	8	9
13	9	9	10	9	9	8	6	7	9	10	9	10
14	8	9	9	10	9	10	8	9	8	9	10	10
15	8	9	9	10	10	10	7	7	8	9	11	10
16	8	10	11	10	10	10	7	10	10	10	11	11
17	7	10	10	9	9	11	10	11	10	10	11	11
18	6	7	9	7	9	9	11	10	11	8	9	9
19	10	11	10	8	10	10	10	10	11	9	9	10
20	10	10	10	10	10	11	11	11	10	9	10	10
10-А экспериментальная (юноши)												
1	7	7	8	6	5	9	7	8	9	6	8	9
2	6	6	8	8	6	8	8	9	8	7	8	10
3	6	5	7	6	7	7	7	10	9	9	5	10
4	9	9	7	7	8	10	6	9	9	6	6	9
5	5	6	5	9	7	9	8	9	8	6	8	10
6	8	6	8	8	6	10	9	7	8	7	7	8
7	8	5	8	5	5	8	10	9	9	7	6	9
8	6	6	10	8	8	7	9	8	9	6	6	10
9	6	7	8	7	7	7	8	8	8	8	5	9
10	6	7	7	7	8	8	5	7	8	8	8	9
11	6	5	9	7	7	7	6	7	8	8	6	10
11-В - экспериментальный (юноши)												
1	7	9	10	7	7	9	7	8	10	6	8	10
2	5	8	9	8	8	9	6	8	9	7	9	10
3	6	8	10	8	8	10	8	9	10	8	7	11
4	7	8	9	7	8	10	8	8	10	6	8	9
5	8	9	10	6	7	9	7	8	11	6	8	9
6	8	9	10	5	7	9	9	10	11	7	9	10
7	7	9	10	7	7	8	8	9	10	8	10	11

№	ТЕМА 1			ТЕМА 2			ТЕМА 3			ТЕМА 4		
	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ
8	9	8	9	6	8	8	5	7	10	6	7	8
9	5	7	9	9	10	10	8	8	9	7	8	9
10	7	8	9	8	9	11	7	9	9	8	9	10
11	6	8	8	8	9	11	6	9	10	8	10	11
12	8	9	9	7	9	9	8	9	10	7	9	10
13	8	9	10	7	9	10	6	7	9	7	8	10
14	7	8	9	6	8	11	8	8	9	8	9	9
11 -экспериментальный (юноши)												
1	9	9	10	6	8	9	7	9	10	9	9	10
2	8	9	10	7	7	8	9	9	11	8	7	9
3	7	8	10	7	8	9	8	10	10	7	8	10
4	6	7	9	8	8	10	7	8	9	6	9	10
5	5	7	9	6	9	10	8	8	9	8	9	11
6	7	8	9	7	9	11	6	7	8	7	8	11
7	6	8	9	6	6	8	8	7	8	6	6	10
8	5	7	8	5	7	8	6	7	10	5	6	10
9	8	8	9	7	8	8	8	9	10	6	6	9
10	9	10	10	6	9	9	7	8	8	7	9	9

№	ТЕМА 1			ТЕМА 2			ТЕМА 3			ТЕМА 4		
	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ	ТЗ	МЗ	ПЗ
11	9	9	10	8	8	9	8	7	9	8	10	10
12	8	8	9	5	7	8	8	9	9	8	9	11
13	8	9	10	6	6	8	7	7	9	9	10	10
14	6	7	9	6	7	7	7	9	10	10	11	11
15	7	9	10	5	7	9	7	9	10	9	10	11
16	5	8	9	6	8	9	8	9	8	8	9	11
17	6	9	10	7	9	10				6	8	9
10-А кспериментальная (юноши)												
1	7	8	9	6	9	9	6	9	9	9	9	10
2	6	8	10	5	8	8	5	9	9	8	7	9
3	8	9	9	7	8	8	8	8	9	7	8	10
4	7	9	10	8	9	10	8	8	10	6	9	10
5	6	9	8	7	8	9	7	9	10	8	9	11
6	5	6	9	10	9	9	10	9	10	7	8	11
7	8	8	9	5	9	8	6	8	9	6	6	10
8	7	8	9	8	9	9	6	7	9	5	6	10
9	5	8	10	7	7	9	8	8	8	6	6	9
10	7	9	10	6	6	7	8	8	9	7	9	9
11	8	9	9	8	8	8	8	9	9	8	10	10

Протокол 2. Уровня двигательной активности экспериментальных групп

№	Класс	Уровень ДА (калл)	№	Класс	Уровень ДА (калл)	№	Класс	Уровень ДА (калл)	№	Класс	Уровень ДА (калл)
Юноши			33	11-В	2789	**Девушки**			33	11-а	2788
1	10-а	2991	34	11-В	2854	1	10-в	2557	34	11-а	2852
2	10-а	2870	35	11-В	2640	2	10-в	2653	35	10-а	2680
3	10-а	2786	36	11-В	2884	3	10-в	2651	36	10-а	2560
4	10-а	2890	37	11-В	3186	4	10-в	2841	37	10-а	2642
5	10-а	2654	38	11-В	3001	5	10-в	2693	38	10-а	2850
6	10-а	3058	39	11-В	3045	6	10-в	2765	39	10-а	2800
7	10-а	2871	40	11-В	2875	7	10-в	2800	40	10-а	2654
8	10-а	3089	41	11-В	2986	8	10-в	2658	41	10-а	2764
9	10-а	30008	42	11-В	2894	9	10-в	2574	42	10-а	2684
10	10-а	2684	43	10-Б	2876	10	10-в	2586	43	10-а	2870
11	10-а	3085	44	10-Б	2789	11	10-в	2695	44	10-а	2563
12	11	3008	45	10-Б	3007	12	10-в	2439	45	10-а	2554
13	11	3054	46	10-Б	2856	13	10-в	2587	46	10-а	2654
14	11	3105	47	10-Б	2645	14	10-в	2687	47	11-а	2870
15	11	3106	48	10-Б	2891	15	11-а	2589	48	11-а	2785
16	11	3117	49	10-Б	2654	16	11-а	2865	49	11-а	2687
17	11	3089	50	10-Б	2785	17	11-а	2900	50	11-а	2900
18	11	2988	51	10-Б	2658	18	11-а	2676	51	11-а	2660
19	11	2874	52	10-Б	3056	19	11-а	2654	52	11-а	2894
20	11	3064	53	10-Б	3054	20	11-а	2669	53	11-а	2778
21	11	3056				21	11-а	2848	54	11-а	2890
22	11	3187				22	11-а	2760	55	11-а	2990
23	11	2880					11-а	2878	56	11-а	2556
24	11	2877				24	11-а	2848	57	11-а	2683
25	11	2912				25	11-а	2541	58	11-а	2643
26	11	2988				26	11-а	2598			
27	11	2981				27	11-а	2753			
28	11	3099				28	11-а	2650			
29	11-В	2897				29	11-а	2984			
30	11-В	3015				30	11-а	2878			
31	11-В	3189				31	11-а	2899			
32	11-В	2987				32	11-а	2651			

Протокол 3. Показатели функционального состояния контрольной и экспериментальной групп.

№	класс	ЖЕЛ		Проба Руфье		Проба Робинсона		Жизненный индекс	
		до	после	до	после	до	после	до	после
Юноши (экспериментальная)									
1	11 В	4100	4200	12,4	7,6	78,3	76,2	68,56	99,0
2	11 В	4200	4900	15,2	5,6	101,6	84,0	51,09	58,89
5	11 В	4200	4300	14,4	6,4	79,2	71,0	64,22	63,80
3	11 В	4300	4700	11,2	6,4	100,8	76,2	65,75	70,68
4	11 В	5900	6200	15,6	8,8	109,2	112,6	79,19	79,69
6	11 В	3800	4300	15,2	11,6	103,0	96,4	53,45	61,25
8	11 В	3400	4300	7,6	8	92,0	104,9	53,04	66,98
7	11 В	4200	4200	17,2	12,8	112,8	89,8	63,64	63,49
9	11 В	4000	3200	9,2	6,8	152,9	146,9	53,91	41,67
10	11 В	2800	3800	16,8	12,8	117,9	131,7	43,41	61,24

11	11 В	4400	5300	13,6	9,2	75,6	88,1	68,32	81,66
12	11 В	2800	3600	10	5,2	73,4	99,2	48,36	60,81
13	11 В	4100	4400	12,8	6,8	100,3	90,5	60,21	63,86
14	11 В	4500	4500	8	4,4	72,7	80,9	80,79	80,94
15	11 В	3900	4300	6,8	6	114,4	94,4	52,00	55,74
16	11	3400	3500	12	5,6	90,0	87,5	58,22	58,92
17	11	2900	3100	12,4	9,6	70,0	65,3	58,00	64,18
18	11	4900	5700	15,6	6,8	115,2	88,4	71,01	82,61
19	11	4100	4200	11,2	4,8	88,9	69,6	58,40	60,43
20	11	3600	4500	8,8	6,4	78,2	78,2	56,69	67,67
21	11	2300	4200	6,4	4,4	63,0	63,0	40,35	75,54
22	11	4700	4700	9,6	6,4	96,0	76,8	84,68	83,93
23	11	3500	4000	6,8	6,4	79,4	81,8	55,91	64,00
24	11	4800	5100	12	11,6	96,5	96,5	66,30	74,24
25	11	3600	4300	10	8	92,8	71,7	50,70	61,21
26	11	3400	3800	16,8	12,8	110,4	72,4	58,12	62,09
27	11	3900	3950	14,4	12,8	119,0	86,6	64,89	71,17
28	11	3500	3600	7,2	7,2	95,8	75,5	55,56	55,38
29	11	3500	4600	12,4	6,4	101,6	68,2	50,72	59,39
30	11	4300	4300	11,2	5,2	84,3	75,9	68,80	64,37
31	11	3800	4700	8,4	6	80,9	88,8	53,52	58,75
32	11	3600	4200	14,4	5,2	131,0	92,0	51,80	55,19
33	11	3600	4200	8	7,2	81,4	104,0	52,17	61,31
34	10Б	3200	3000	12	5,2	120,0	91,6	60,26	56,82
35	10 Б	2500	2500	8	7,6	87,4	61,6	39,06	37,15
36	10 Б	3100	3100	12,4	12,8	104,0	96,8	61,26	59,73
37	10 Б	2800	2900	12,8	10,4	70,6	66,6	50,82	51,46
38	10 Б	3200	3100	12,4	11,2	102,7	87,0	54,70	51,93
39	10 Б	4200	4000	10	9,2	81,4	65,4	71,79	64,72
40	10 Б	2000	2200	12,8	15,2	80,0	116,2	43,38	45,31
41	10 Б	3100	3500	11,2	10,8	89,6	73,5	58,16	52,12
42	10 Б	3500	3500	7,6	9,2	89,6	89,3	52,24	52,63
43	10 Б	2500	3100	16	15,2	67,2	71,0	51,76	62,00
44	10 Б	3400	3400	11,6	11,2	83,6	85,9	57,63	52,47
45	10-А	3500	3800	12,4	8	71,4	72,5	63,52	64,41
46	10-А	4000	4800	15,6	6,4	98,0	81,3	72,73	77,29
47	10-А	3300	3500	12,8	8	73,4	79,2	55,46	56,27
48	10-А	3400	3300	12	9,6	85,0	67,3	55,37	50,69
49	10-А	3200	3700	10,8	10	79,6	95,6	57,97	49,20
50	10-А	4000	4100	10	8,8	88,9	88,3	69,44	64,87
51	10-А	4100	3800	14,8	6,4	115,0	84,5	62,79	61,49
52	10-А	4500	3800	6,8	6,8	87,3	81,6	67,06	54,44
53	10-А	3500	3500	7,2	6,8	64,2	61,0	57,85	56,63
54	10-А	3200	3600	14,4	10,8	119,0	94,1	53,33	57,69
55	10-А	4200	4300	8,8	8,8	105,0	94,4	61,58	62,68
девушки (экспериментальная)									
1	10-а	2000	2400	14,4	12,0	90,4	83,46	30,76	34,783
2	10-а	2800	3000	18,4	13,2	117,8	82,14	51,66	54,25
3	10-а	3200	3500	16,4	15,6	110,4	96,32	58,18	68,898
4	10-а	2400	3100	19,2	12,0	104	82,39	43,4	56,881
5	10-а	2400	2600	13,6	13,6	137,2	89,6	45,74	50,732
6	10-а	3000	3100	12,4	11,2	96,6	85,88	56,07	56,261
7	10-а	2300	2600	16	13,6	108	98,01	49,04	56,893
8	10-а	2400	2400	3,6	5,6	64,8	72,6	47,15	49,587
9	10-а	2400	2900	12,4	9,6	107,2	72,8	45,28	56,641

10	10-а	2200	2800	19,2	16,8	133	120,3	36,66	49,645
11	10-а	2300	2500	18	12,8	171,8	102,5	38,33	43,178
12	10-а	2500	2400	10	10,0	85,1	87,69	46,72	44,86
13	11	2400	2850	14	13,2	90,72	86,4	42,85	50,847
14	11	2600	2600	10,4	10,0	87,2	88	55,31	57,143
15	11	2500	3000	12,8	13,2	68,68	69,69	46,99	58,594
16	11	2700	2850	10,8	8,8	71,4	67,98	43,47	48,469
17	11	2400	3000	8,4	8,4	57,6	58,56	45,54	60,12
18	11	3300	3500	21,2	15,6	101,8	79,54	58,20	64,279
19	11	2200	2700	13,6	12,0	84,48	90,3	41,50	50,514
20	11	1900	2100	12	10,8	69,84	71,71	41,66	50,239
21	11	2500	2500	14,8	13,6	97,6	88,14	45,87	49,505
22	11	2700	2800	19,6	13,6	100,8	76,32	52,83	56,169
23	11	2300	2800	14,4	13,6	75,6	84	46	54,581
24	11	2200	2200	16,8	14,8	119,0	114,7	26,51	26,944
25	11-а	2500	3200	12,8	14,0	111,3	92,82	56,82	71,429
26	11-а	2400	2500	6	6,0	80,24	79,92	42,71	44,405
27	11-а	2850	3000	12,8	15,6	88,29	113,3	64,77	67,873
28	11-а	2800	2600	10,8	11,6	83,6	71,2	62,22	59,091
29	11-а	2600	2600	9,6	16,4	88,56	80,25	44,75	45,375
30	11-а	2900	2900	15,6	12,0	100,3	75,48	57,54	57,654
31	11-а	3100	3400	13,2	12,8	118,3	103,7	45,59	53,968
32	11-а	3400	3600	12,8	18,4	88	108,8	61,15	64,458
33	11-а	3100	3400	8,4	9,2	56,4	59,16	65,54	67,729
34	11-а	1900	2300	2,8	5,2	56	60,48	36,82	46
35	11-а	2300	2700	12,4	11,2	57,68	51,3	47,03	55,328
36	11-а	2500	2700	12,8	10,8	116,6	99,9	47,62	51,823
37	11-а	3400	2500	14	12,0	74,4	104,2	53,84	41,494
38	11-а	2200	2700	14	6,4	79,8	92,82	33,79	39,706
39	11-а	2700	2900	20,4	11,6	105,0	125,1	56,13	60,166
40	11-а	2400	3000	5,2	12,8	60,52	76,84	43,48	54,545
41	11-а	2600	2100	9,6	14,4	76	98,88	46,51	37,267
42	11-а	3000	2600	12,4	12,0	86,4	84,36	62,24	55,085
43	11-а	3300	3300	10,4	16,4	68,8	46,64	63,22	63,584
44	11-а	2200	3100	4	3,6	58,8	60	48,03	67,245
45	10-в	2700	2400	12,4	8,4	92,4	107,7	52,73	46,967
46	10-в	2300	2800	10,4	10,2	74,8	83,43	50	60,215
47	10-в	2700	3100	10,8	8,0	110,4	87,04	52,84	59,615
48	10-в	1800	2000	12,4	11,2	61,2	87,36	34,35	38,76
49	10-в	2500	2500	8,8	6,4	49,84	51,51	51,23	51,44
50	10-в	2900	3000	15,6	6,8	78,4	72	58,82	59,88
51	10-в	2500	2800	15,2	14,0	72,72	126,6	52,97	59,448
52	10-в	1900	2400	15,2	17,2	77,52	99,36	33,57	41,958
53	10-в	2000	2400	14,4	18,8	68,4	81,37	40	48,193
54	10-в	2100	2200	16,8	8,0	63,6	91,16	41,58	43,608
55	10-в	1300	1900	20	8,4	105,6	116,6	32,83	48,223
56	10-в	2700	2900	18,8	14,0	100,3	107,9	45,76	50,26
57	10-в	2500	2600	11,6	8,8	57,6	73,6	55,31	58,036
58	10-в	2400	2800	12,8	8,0	72	46,92	45,19	52,93

Протокол 4. Показатели физической подготовленности юношей и девушек контрольной и экспериментальной групп до и после эксперимента.

№	Контрольные тесты						№	Контрольные тесты					
	Бег на 60 м	Бег на 2000 м	Наклон вперед	Подтягивание	Челночный бег 4х10м	Прыжок в длину с места		Бег на 60 м	Бег на 2000 м	Наклон вперед	Подтягивание	Челночный бег 4х10м	Прыжок в длину с места
		юноши						девушки					
1	4,5	8,15	19	15	9,4	200	1	6,2	13	16	10	13,1	122
2	4	7,08	3	13	9	265	2	6,3	12	19	13	11	179
3	4,3	9,15	5	13	9,3	200	3	5,7	10,26	14	13	11	136
4	4,3	9,19	11	8	9,2	200	4	5,2	11,4	20	10	11,5	173
5	4,4	8,36	8	6	9,8	202	5	6,2	11,01	10	14	11,4	157
6	4,9	9,22	8	6	9,9	196	6	5,2	11,02	17	20	11	158
7	5	9,25	6	12	9,6	190	7	5,3	12,3	19	10	11,7	156
8	4,7	8,2	12	14	9,3	215	8	5,6	12,08	14	12	11,3	160
9	5,3	10,21	-3	2	10,3	162	9	5,3	9,05	19	18	11,3	176
10	5,2	10,01	11	10	9,6	220	10	5,8	13	28	17	11,7	155
11	4,8	9,23	8	0	9,3	193	11	5,8	12,5	11	5	13,1	149
12	4,5	8,52	14	12	9,1	235	12	5,9	12,5	10	15	11,3	169
13	5,2	9,58	11	9	9,8	220	13	5,4	11,48	10	15	11,3	173
14	5,1	9,46	9	8	8,9	240	14	5,8	13,05	4	18	11,5	150
15	4,7	9,25	12	11	9,1	225	15	5,6	11,49	21	16	10,4	158
16	4,2	9	14	16	9,1	243	16	5,5	13	12	17	12,1	151
17	4,5	9	14,5	13	9,2	235	17	4,9	11,21	17	16	10,4	189
18	4,4	8,51	14	14	9,2	210	18	4,7	10,49	29	21	10,8	174
19	4,9	9,1	12	11	9,5	215	19	5,7	12,45	26	22	11,1	170
20	4,6	9,51	11	10	9,7	220	20	4,8	12,22	15	18	11	154
21	4,9	9,35	11	10	9,6	210	21	5,4	11,33	20	20	11,1	175
22	4,4	9,05	11	10	9,6	212	22	5,6	11,27	13,5	19	12,3	171
23	4,6	8,38	15	13	9,1	238	23	4,9	11,28	9	15	11,5	162
24	4,3	8,59	14	13	9	240	24	5	11,12	16	9	12,1	176
25	4,6	9,32	12	11	9,5	225	25	5,1	12,36	11	11	11,5	175
26	4,6	9,42	11	15	9,3	210	26	5,5	12,42	15	13	11,9	163
27	4,6	8,57	12	15	9,6	230	27	5,8	11,5	24	11	12,4	164
28	4,3	8,56	14	13	8,6	242	28	5,5	10,3	7	8	11,5	161
29	5,6	10	3	6	10,7	200	29	5,1	9,55	23	19	10,6	196
30	5,2	9,36	-16	0	11,6	195	30	5,2	10	21	14	10,9	171
31	4,7	9,32	0	2	11,5	180	31	5,3	9,5	28,5	15	10,5	183
32	5	8,2	0	10	10,4	215	32	5,2	10,15	12	18	10,3	155
33	4,5	8,48	10	15	10,3	200	33	5,7	14,4	3	15	12,3	132
34	4,4	8,42	12	16	10,6	198	34	5,6	12	17	21	12	163
35	4,4	8,56	2	19	10,4	230	35	5,4	9,4	26	16	11,1	172
36	4,9	8,49	-5	16	10,1	200	36	5,7	13,1	5	12	11,8	148
37	4,9	9,35	8	0	11,1	165	37	5,5	11,4	9	12	11,6	164
38	4,8	9,12	0	8	10,6	230	38	6,1	15,1	-2	5	12,8	140
39	4,8	8,23	10	10	10,4	195	39	5,5	12,05	15	23	12,4	172
40	4,1	9,1	8	8	10,3	220	40	5,6	12,22	13	20	11,3	165
41	4,9	8,2	10	12	9,4	235	41	5,6	13,22	0	11	11,6	168
42	4,9	9,35	12	2	10,5	200	42	5,5	10,3	7	33	10,6	172
43	4,4	7,48	7	12	10,8	205	43	5,4	12,51	10	21	11,4	167

44	4,6	8,56	5	4	10,1	180	44	5,3	11,45	12	9	11,6	172
45	5,3	9,2	4	7	10,3	172	45	5,4	12,04	18	11	11,2	180
46	4,9	9,09	18	8	9,9	200	46	5,6	10,33	16	27	11,3	186
47	4,9	8,25	0	6	9,6	195	47	5	10,43	4	20	11,3	173
48	4,1	7,08	9	11	10,8	205	48	4,9	12,38	5	22	11,7	179
49	5,1	7,4	2	8	9,7	178	49	5,1	12,46	21	19	11,4	174
50	5	8,11	12	9	10,6	210	50	5,2	11,55	10	14	11,8	160
51	4,4	9,05	15	22	9,4	190	51	5,2	13	15	12	11,6	163
52	4,2	8,47	-7	9	10,4	195	52	6	13,58	15,5	10	13,2	153
53	5	8,1	11	10	9,7	209	53	5,5	11,48	13,5	21	11,4	155
54	4,3	9,1	0	8	9,8	208	54	5,3	11,36	14	6	12,3	152
55	4,5	10,2	10	6	9,8	196	55	5,6	11,16	5	14	12,4	155
							56	5,1	13,1	11	26	11,5	181
							57	5	12,03	3,5	15	11,4	178
							58	5,1	13,09	-4	6	11,7	176